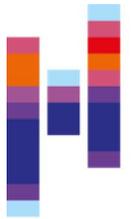


# Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. **Potenzen**
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# 4. Potenzen



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Definition

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ mal}} = 81$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative**  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Definition

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$$

Allgemein schreibt man Mehrfachprodukte als Potenzen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$a^n$  ← Potenz = Exponent  
Basis



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Definition

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$$

Allgemein schreibt man Mehrfachprodukte als Potenzen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$a^n$  ← Potenz = Exponent  
Basis

Für  $0 \neq a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

$$\square^{-0} = \frac{1}{\square^0}$$

Sonderfälle:  $a^0 = 1$ ,  $0^n = 0$ ,  $1^n = 1$

Vorsicht:

$0^0$  ist nicht definiert!



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze

## Multiplikation

### Potenzen mit gleicher Basis

$$a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

Allgemein gilt, Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten der Faktoren potenziert:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-faches Produkt}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-faches Produkt}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n+m\text{-faches Produkt}},$$

Beispiele:

$$5a^6 \cdot 7a^3 \cdot 3a = 105a^{10} = 105 \cdot a^{6+3+1}$$

$$a^3 \cdot a^4 = a^7$$

$$(a+b)^{n-3} \cdot (a+b)^{5-n} = (a+b)^2$$

$$(a+b)^{n-3} \cdot (a+b)^{5-n} = (a+b)^{n-3+5-n} = (a+b)^2$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze

## Multiplikation

### Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

$$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = (ab)(ab)(ab) = (ab)^3$$

Allgemein gilt, Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-faches Produkt}} \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-faches Produkt}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n\text{-faches Produkt}}$$

Beispiele:

$$(x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = ((x+1)(x-1))^2 = (x^2 - 1)^2$$

$$-8x^3y^3 = (-2)^3 x^3 y^3 = (-2xy)^3$$

$$\textcircled{1} (x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = \left( \underbrace{(x+1)(x-1)}_{a^2 - b^2} \right)^2 = (x^2 - 1)^2$$

$$\textcircled{2} -8x^3y^3 = (-2)^3 x^3 y^3 = (-2xy)^3$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze

## Multiplikation

### Vorsicht

Für die allgemeine Multiplikation von Potenzen, die weder eine gleiche Basis noch einen gleichen Exponenten haben, lässt sich **keine** allgemeine Umformung angeben.

z.B.  $3^5 \cdot 4^2$  ist ungleich(!)  $(3 \cdot 4)^{5+2}$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative**  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze

#### Potenzen von Potenzen

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$\underbrace{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-faches Produkt}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-faches Produkt}}}_{m\text{-faches Produkt}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{nm\text{-faches Produkt}}.$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in einem Produkt gilt stets:

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n} = (a^m)^n.$$

Beispiele:

$$(a^2)^3 = a^6$$

$$(4a^2)^3 = 4^3 a^6 = 64 a^6$$

aber  $a^{(2^3)} = a^8$

$$a^{(2^3)} = a^8$$

$$(a^2)^3 = a^6$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze

### Negative Exponenten

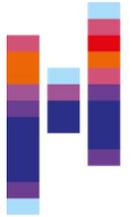
Wir setzen zur Abkürzung:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = (a^{-1})^n, \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze

#### Division

Der Exponent des Quotienten ist gleich der Differenz der Exponenten von Dividend und Divisor:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und diesen Quotienten mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

Beispiele:

$$a^{-2} x^4 \cdot ax^{-3} = a^{-1} x = \frac{x}{a}$$

$$\frac{(-2ax)^5}{8ax^6} = \frac{-2^5 a^5 x^5}{2^3 ax^6} = \frac{-2^2 a^4}{x} = -\frac{4a^4}{x}$$

$$(a^3 b^2)^n \div (a^2 b^3)^n = \left(\frac{a^3 b^2}{a^2 b^3}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$c) \frac{(a^3 b^2)^n}{(a^2 b^3)^n} = \left(\frac{a^3 b^2}{a^2 b^3}\right)^n = \left(a^3 b^2 \cdot a^{-2} b^{-3}\right)^n = (a b^{-1})^n = \underline{\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^n}}$$

$$a) a^{-2} x^4 \cdot ax^{-3} = a^{-2+1} \cdot x^{4-3} = a^{-1} \cdot x = \frac{x}{a}$$
$$b) \frac{(-2ax)^5}{8ax^6} = \frac{(-2)^5 a^5 x^5}{2^3 a x^6} = -2^2 \cdot a^4 \cdot x^{5-6} = -2^2 \cdot a^4 \cdot x^{-1} = -\frac{4a^4}{x}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze - Zusammenfassung



Nun können wir mit ganzzahligen Potenzen rechnen und halten folgende Regeln fest.

Multiplikation und Division von  
Potenzen mit gleicher Basis:

$$\textcircled{1} a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit  
gleichem Exponenten:

$$\textcircled{2} a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

$\textcircled{3}$  Potenzieren einer Potenz:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

$n$  und  $m$  sind ganze Zahlen. Division durch Null  
muss ausgeschlossen werden.

$$a^n + a^m \quad \text{keine regel}$$

$$a^n + b^n \quad \text{keine Regel}$$

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzgesetze - Zusammenfassung

Nun können wir mit ganzzahligen Potenzen rechnen und halten folgende Regeln fest.



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

Potenzieren einer Potenz:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

$n$  und  $m$  sind ganze Zahlen. Division durch Null muss ausgeschlossen werden.

⚠  $a^5 - a^3 \neq a^2$   
 $a^2 + a^5$  geht nicht  
 $a^2 + b^2$  geht nicht  
Für Summen keine Regeln!

## 4. Potenzen

### 4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

#### Beispiele

Wir vereinfachen:

$$\frac{3^{-4}}{3^{-9}} = 3^{-4-(-9)} = 3^5,$$

$$\frac{3^6}{\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \left(\frac{3}{\frac{1}{3}}\right)^6 = 9^6.$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{a}\right)^3 (ab)^4 + 3 \frac{(ab)^2}{b^2} &= (-1)^3 \left(\frac{1}{a}\right)^3 \overset{a^1}{\cancel{a^4}} b^4 + 3 \frac{\cancel{a^2} b^2}{\cancel{b^2}} \\ &= -\frac{\overset{a}{\cancel{a^4}} b^4}{\cancel{a^3}} + 3a^2 \\ &= a(3a - b^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9a-3b}{9b^2-81a^2} &= \frac{9a-3b}{(-1)((9a)^2-(3b)^2)} \\ &= -\frac{9a-3b}{(9a+3b)(9a-3b)} \\ &= -\frac{1}{9a+3b}. \end{aligned}$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$(1) a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad (2) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$(3) a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad (4) \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

Potenzieren einer Potenz:

$$(5) (a^n)^m = a^{nm}.$$

$n$  und  $m$  sind ganze Zahlen. Division durch Null muss ausgeschlossen werden.



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $a \geq 0$  eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Zahl  $b$ , welche größer oder gleich Null ist und deren  $n$ -te Potenz  $a$  ergibt, mit  $\sqrt[n]{a}$ :

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n \quad (a, b \geq 0).$$

**Sprechweise:**  $n$ -te Wurzel aus  $a$ .



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

#### n-te Wurzel

Sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $a \geq 0$  eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Zahl  $b$ , welche größer oder gleich Null ist und deren  $n$ -te Potenz  $a$  ergibt, mit  $\sqrt[n]{a}$ :

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n \quad (a, b \geq 0).$$

$\sqrt[n]{a}$   
↑ Radikand

**Sprechweise:**  $n$ -te Wurzel aus  $a$ .



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

#### n-te Wurzel

Sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $a \geq 0$  eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Zahl  $b$ , welche größer oder gleich Null ist und deren  $n$ -te Potenz  $a$  ergibt, mit  $\sqrt[n]{a}$ :

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n \quad (a, b \geq 0).$$

$\sqrt[n]{a}$   
↑ Radikand

**Sprechweise:**  $n$ -te Wurzel aus  $a$ .

Die  **$n$ -te Wurzel**  $\sqrt[n]{a}$  ist diejenige (positive) Zahl, die mit  $n$  potenziert  $a$  ergibt, d.h. für die  $n$ -te Wurzel gilt folgende Definitionsgleichung:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0$$

**Spezialfälle:**  $\sqrt[1]{a} = a$ ,  $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{a}$ : Kubikwurzel



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, b > 0.$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

#### n-te Wurzel

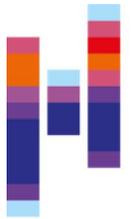
Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, b > 0.$$

$$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

#### Quadratwurzeln

Sei  $a \geq 0$ . Wir bezeichnen die Zahl  $b$ , welche größer oder gleich Null ist und deren Quadrat  $a$  ergibt, mit  $\sqrt{a}$  (**Quadratwurzel** aus  $a$ ):

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \quad (a, b \geq 0).$$

Es gilt z.B.  $\sqrt{0} = 0$ ,  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{10000} = 100$ ,  $\sqrt{0,04} = 0,2$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Es gilt im Allgemeinen nicht:  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{a})^2 &= a, \quad a \geq 0 \\ \sqrt{a^2} &= |a| \\ &\swarrow \quad \searrow \\ a > 0 & \quad a \leq 0 \end{aligned}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Vereinfachen Sie

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Es gilt im Allgemeinen nicht:  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$(\sqrt{13})^2 = 13, \quad (\sqrt{13})^3 = 13\sqrt{13},$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative**  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Vereinfachen Sie

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Es gilt im Allgemeinen nicht:  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$(\sqrt{13})^2 = 13, \quad (\sqrt{13})^3 = 13\sqrt{13},$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8} + \sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{5})}{(\sqrt{8} + \sqrt{5})} \\ &= \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{8 + 2\sqrt{8}\sqrt{5} + 5}{8 - 5} \\ &= \frac{13 + 2\sqrt{4 \cdot 2}\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{13 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5}{3} \\ &= \frac{13 + 4\sqrt{10}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ (\sqrt{8} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{5}) &= \\ (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{5})^2 &= 8 - 5 = 3 \end{aligned}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Rationalisieren des Nenners

$$1. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt{15}$$

$$2. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{6}}{4}$$



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Damit ergibt sich

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[11]{a} = a^{\frac{1}{11}}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative**  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

oben  
unten

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Damit ergibt sich

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1$$

Potenzen mit rationalen Exponenten werden eingeführt durch:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ .

Beispiele:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$b) \sqrt[3]{a^5} \cdot (\sqrt{a})^3 = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{19}{6}} = \sqrt[6]{a^{19}}$$

$$b) \sqrt[3]{a^5} \cdot (\sqrt{a})^3 = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{5}{3} + \frac{3}{2}} = a^{\frac{19}{6}}$$

Alle Regeln der Potenzrechnung gelten auch für das Rechnen mit rationalen bzw. reellen Exponente (Wurzeln).  
Für rationale Exponenten  $p, q$  und Basen  $a, b > 0$  gilt:

- 1.)  $a^p a^q = a^{p+q}$ ,
- 2.)  $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ ,
- 3.)  $a^p b^p = (ab)^p$ ,
- 4.)  $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$ ,
- 5.)  $a^p a^{-p} = 1$ .



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative**  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

#### Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}).$

Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke bzw. schreiben Sie die Ausdrücke als Potenzen:

1	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a}$
2	$az \div \sqrt{\frac{a}{z}}$
3	$\sqrt[3]{27^2}$
4	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y}{x}}$
5	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

#### Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

1. „Addition und Subtraktion der Wurzeln“.

*Vereinfachen Sie:*

$$3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} =$$

2. Multiplikation und Division von gleichnamigen Wurzeln:

a.  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} =$

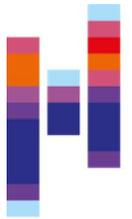
b.  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} =$

3. Teilweises Wurzelziehen:

$$\sqrt{5 \cdot x^2 y^3} =$$

4. Unter die Wurzel bringen:

$$x \cdot \sqrt[4]{a} =$$



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 4. Potenzen

### 4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

#### Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

5. Schreiben Sie als eine Wurzel:

$$a. \frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{5}} =$$

$$b. \sqrt[3]{\sqrt{4}} =$$

6. Schreiben Sie als n-te Wurzel:

$$a. 2^{\frac{1}{2}} =$$

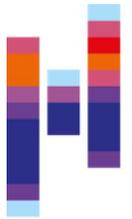
$$b. 7^{\frac{2}{3}} =$$

$$c. 9^{-\frac{2}{5}} =$$

7. Schreiben Sie als Potenz von 2:

$$a. \sqrt[3]{4} =$$

$$b. \sqrt[6]{16} =$$



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### 4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Unbekannte Variable steht in einer ganzzahligen Potenz:

$$x^n = b, \quad b > 0$$

#### 1. Gerade Exponenten:

→ Die Potenzgleichung besitzt zwei Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{b}$$

da es  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$  für  $n$  gerade gilt.

**Beispiele:** *Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen*

a.  $x^6 = 64 \Rightarrow \sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{64} \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

b.  $x^2 = -4 \Rightarrow$  keine Lösung in reellen Zahlen  $L = \{ \}$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### 4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Unbekannte Variable steht in einer ganzzahligen Potenz:

$$x^n = b, \quad b > 0$$

#### 2. Ungerade Exponenten:

→ Die Potenzgleichung besitzt einzige Lösung:

$$\checkmark x = \sqrt[n]{b}, \quad \text{wenn } b > 0$$

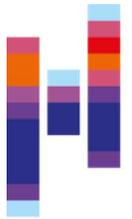
$$\checkmark x = -\sqrt[n]{b}, \quad \text{wenn } b < 0$$

**Beispiele:** *Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen*

a.  $x^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$ , da  $\sqrt[n]{x^n} = x$  für  $x$  ungerade  $\Rightarrow x = 2$  und  $L = \{2\}$

b.  $x^3 = -8$

Wenn wir hier die Wurzel ziehen, stoßen wir auf ein Problem, dass Radizieren ist für negative Radikanden nicht definiert ist! → Siehe weiter



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### 4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

$$x^3 = -8 \text{ ??}$$

Wir wenden einen Trick an, um das negative Vorzeichen zu beseitigen: Wir quadrieren.

$$x^3 = -8 \quad | \text{Quadrieren}$$

$$(x^3)^2 = (-8)^2$$

$$x^6 = 64 \quad | \sqrt[6]{\phantom{x}}$$

$$\sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{64} \quad | \text{Da } n \text{ gerade ist, gilt: } \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

Um Scheinlösungen auszusortieren, machen wir die Probe:

$$x^3 = -8 \quad | x_1 = -2$$

$$(-2)^3 = -8$$

$$-8 = -8$$

**Wahre Aussage!**

$$x^3 = -8 \quad | x_2 = 2$$

$$2^3 = -8$$

$$8 = -8$$

**Falsche Aussage!**

$$\mathbb{L} = \{-2\}.$$

<https://www.mathebibel.de/potenzgleichungen>



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern