Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

4. Potenzen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definition

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$
\begin{aligned}
3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \\
(-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 \\
\left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}
\end{aligned}
$$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definition

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$\begin{aligned} 3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \\ (-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243} \end{aligned}$$

Allgemein schreibt man Mehrfachprodukte als Potenzen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - mal}}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{a}_{\text{Basis}}{}^{n}$$

Potenz = Exponent

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definition

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$
\begin{aligned}
3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \\
(-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 \\
\left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}
\end{aligned}
$$

Allgemein schreibt man Mehrfachprodukte als Potenzen:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - mal}}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{a}_{\text{Basis}}{}^{n} \leftarrow \text{Potenz} = \text{Exponent}$$

Für $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$\square^{-0} = \frac{1}{\square^0}$$

Sonderfälle: $a^0 = 1,\ 0^n = 0,\ 1^n = 1$

Vorsicht:

0^0 ist nicht definiert!

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Multiplikation

Potenzen mit gleicher Basis

$$a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

Allgemein gilt, Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten der Faktoren potenziert:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m},}$$

$$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-faches Produkt}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m-faches Produkt}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n+m-faches Produkt}},$$

Beispiele:

$$5a^6 \cdot 7a^3 \cdot 3a = 105a^{10}$$

$$a^3 \cdot a^4 = a^7$$

$$(a+b)^{n-3} \cdot (a+b)^{5-n} = (a+b)^2$$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Multiplikation

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

$$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = (ab)(ab)(ab) = (ab)^3$$

Allgemein gilt, Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert:

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

$$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-faches Produkt}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n-faches Produkt}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{\text{n-faches Produkt}},$$

Beispiele:

$$(x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = ((x+1)(x-1))^2 = (x^2-1)^2$$

$$-8x^3y^3 = (-2)^3x^3y^3 = (-2xy)^3$$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Multiplikation

Vorsicht

Für die allgemeine Multiplikation von Potenzen, die weder eine gleiche Basis noch einen gleichen Exponenten haben, lässt sich **keine** allgemeine Umformung angeben.

z.B. $3^5 \cdot 4^2$ ist ungleich(!) $(3 \cdot 4)^{5+2}$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Potenzen von Potenzen

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}\,.}$$

$$\underbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-faches Produkt}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-faches Produkt}}}_{\text{m-faches Produkt}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{nm-faches Produkt}}\,.$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in einem Produkt gilt stets:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{m \cdot n} = (a^m)^n\,.}$$

Beispiele:

$$(a^2)^3 = a^6$$

$$(4a^2)^3 = 4^3\ a^6 = 64\,a^6$$

aber $a^{(2^3)} = a^8$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Negative Exponenten

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = (a^{-1})^n, \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}\,.}$$

Beispiel:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Division

Der Exponent des Quotienten ist gleich der Differenz der Exponenten von Dividend und Divisor:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a \neq 0}$$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und diesen Quotienten mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,}$$

Beispiele:

$$a^{-2}\, x^4 \cdot a x^{-3} = a^{-1}\, x = \frac{x}{a}$$

$$\frac{(-2ax)^5}{8ax^6} = \frac{-2^5\, a^5\, x^5}{2^3\, ax^6} = \frac{-2^2\, a^4}{x} = -\frac{4a^4}{x}$$

$$(a^3\, b^2)^n \div (a^2\, b^3)^n = \left(\frac{a^3\, b^2}{a^2\, b^3}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze - Zusammenfassung

Nun können wir mit ganzzahligen Potenzen rechnen und halten folgende Regeln fest.

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

Potenzieren einer Potenz:

$$(a^n)^m = a^{n\,m}.$$

n und m sind ganze Zahlen. Division durch Null muss ausgeschlossen werden.

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze - Zusammenfassung

Nun können wir mit ganzzahligen Potenzen rechnen und halten folgende Regeln fest.

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

Potenzieren einer Potenz:

$$(a^n)^m = a^{n\,m}.$$

n und m sind ganze Zahlen. Division durch Null muss ausgeschlossen werden.

⚠ $a^5 - a^3 \neq a^2$

$a^2 + a^5$ geht nicht

$a^2 + b^2$ geht nicht

Für Summen keine Regeln!

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Beispiele

Wir vereinfachen:

$$\frac{3^{-4}}{3^{-9}} = 3^{-4-(-9)} = 3^5,$$

$$\frac{3^6}{\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \left(\frac{3}{\frac{1}{3}}\right)^6 = 9^6.$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{a}\right)^3 (ab)^4 + 3\,\frac{(ab)^2}{b^2} &= (-1)^3\left(\frac{1}{a}\right)^3 a^4b^4 + 3\,\frac{a^2b^2}{b^2}\\ &= -\frac{a^4b^4}{a^3} + 3a^2\\ &= a(3a-b^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{9a-3b}{9b^2-81a^2} &= \frac{9a-3b}{(-1)((9a)^2-(3b)^2)}\\ &= -\frac{9a-3b}{(9a+3b)(9a-3b)}\\ &= -\frac{1}{9a+3b}.\end{aligned}$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ und (2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

(3) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ und (4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$

Potenzieren einer Potenz:

(5) $(a^n)^m = a^{n\,m}.$

n und m sind ganze Zahlen. Division durch Null muss ausgeschlossen werden.

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Sei n eine natürliche Zahl und $a \geq 0$ eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Zahl b, welche größer oder gleich Null ist und deren n-te Potenz a ergibt, mit $\sqrt[n]{a}$:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^n \quad (a, b \geq 0).$$

Sprechweise: n-te Wurzel aus a.

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Sei n eine natürliche Zahl und $a \geq 0$ eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Zahl b, welche größer oder gleich Null ist und deren n-te Potenz a ergibt, mit $\sqrt[n]{a}$:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^n \quad (a, b \geq 0).$$

$\sqrt[n]{a}$

Radikand

Sprechweise: n-te Wurzel aus a.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Sei n eine natürliche Zahl und $a \geq 0$ eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Zahl b, welche größer oder gleich Null ist und deren n-te Potenz a ergibt, mit $\sqrt[n]{a}$:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^n \quad (a, b \geq 0).$$

$\sqrt[n]{a}$ ← Radikand

Sprechweise: n-te Wurzel aus a.

Die **n-te Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ ist diejenige (positive) Zahl, die mit n potenziert a ergibt, d.h. für die n-te Wurzel gilt folgende Definitionsgleichung:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0$$

Spezialfälle: $\sqrt[1]{a} = a,\ \sqrt[2]{a} = \sqrt{a},\ \sqrt[3]{a}$: Kubikwurzel

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, b > 0\,.$$

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, b > 0\,.$$

$$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Quadratwurzeln

Sei $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl b, welche größer oder gleich Null ist und deren Quadrat a ergibt, mit $\sqrt{a}$ (**Quadratwurzel** aus a):

$$\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^2 \quad (a, b \geq 0).$$

Es gilt z.B. $\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{4} = 2,\ \sqrt{10000} = 100,\ \sqrt{0,04} = 0,2$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Es gilt im Allgemeinen <u>nicht</u>: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Vereinfachen Sie

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Es gilt im Allgemeinen nicht: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13, \quad \left(\sqrt{13}\right)^3 = 13\sqrt{13},$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Vereinfachen Sie

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Es gilt im Allgemeinen <u>nicht</u>: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13, \quad \left(\sqrt{13}\right)^3 = 13\sqrt{13},$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} \frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{(\sqrt{8}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{8+2\sqrt{8}\sqrt{5}+5}{8-5} \\
&= \frac{13+2\sqrt{4\cdot 2}\sqrt{5}}{3} \\
&= \frac{13+2\cdot 2\sqrt{2\cdot 5}}{3} \\
&= \frac{13+4\sqrt{10}}{3}.
\end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Rationalisieren des Nenners

1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{4}$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},$$

Damit ergibt sich

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1$$

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als: Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},$$

Damit ergibt sich $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1$

Potenzen mit rationalen Exponenten werden eingeführt durch:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$.

Beispiele:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2}$$

$$\sqrt[3]{a^5} \cdot \left(\sqrt{a}\right)^3 = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{19}{6}} = \sqrt[6]{a^{19}}$$

Alle Regeln der Potenzrechnung gelten auch für das Rechnen mit rationalen bzw. reellen Exponente (Wurzeln). Für rationale Exponenten p, q und Basen $a, b > 0$ gilt:

1.) $a^p a^q = a^{p+q}$,
2.) $(a^p)^q = a^{p\,q}$,
3.) $a^p b^p = (ab)^p$,
4.) $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$,
5.) $a^p a^{-p} = 1$.

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$.

Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke bzw. schreiben Sie die Ausdrücke als Potenzen:

1	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{3a} = a^{\frac{1}{2}}\cdot(3a)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}} = a\cdot 3^{\frac{1}{2}}$
2	$az \div \sqrt{\frac{a}{z}} = az : \left(\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = az\cdot\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a z\cdot z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a z^{1+\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}} = z^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$
3	$\sqrt[3]{27^2} = 27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\cdot\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$
4	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y}{x}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{12}}\cdot y^{-\frac{1}{12}}$
5	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1. „Addition und Subtraktion der Wurzeln“.

   Vereinfachen Sie:

   $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} =$ $\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + 1\right) = a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}} + 1\right)$

   $= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}$

2. Multiplikation und Division von gleichnamigen Wurzeln:

   a. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} =$ $\sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$

   b. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} =$ $\sqrt{\frac{10}{5}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

3. Teilweises Wurzelziehen:

   $\sqrt{5 \cdot x^2 y^3} =$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^3} = \sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{y^2 \cdot y} = \sqrt{5} \cdot x \cdot \overbrace{\sqrt{y^2}}^{y} \cdot \sqrt{y} = xy\sqrt{5y}$

4. Unter die Wurzel bringen:

   $x \cdot \sqrt[4]{a} =$ $\underbrace{\sqrt[4]{x^4}}_{x} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{x^4 \cdot a}$

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

5. Schreiben Sie als eine Wurzel:

   a. $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 5^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{5}}$

   b. $\sqrt[3]{\underbrace{\sqrt{4}}_{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$

   $\left(2^{2}\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

6. Schreiben Sie als n-te Wurzel:

   a. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

   b. $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$

   c. $9^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{9^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{9^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$

7. Schreiben Sie als Potenz von 2:

   a. $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \underline{\underline{2^{\frac{2}{3}}}}$

   b. $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = 2^{\frac{4}{6}} = \underline{\underline{2^{\frac{2}{3}}}}$

$\sqrt{4} = 2$

4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Unbekannte Variable steht in einer ganzzahligen Potenz:

$$\boxed{x^n = b,} \qquad b > 0$$

$x^n = b \quad | \sqrt[n]{\ }$

$|x| = \sqrt[n]{b}$

$x = \sqrt[n]{b}$ oder $-x = \sqrt[n]{b}$

$\boxed{x_1 = \sqrt[n]{b}}$ und $\boxed{x_2 = -\sqrt[n]{b}}$

1. Gerade Exponenten:

→ Die Potenzgleichung besitzt zwei Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{b}$$

da es $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ für n gerade gilt.

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Beispiele: *Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen*

a. $x^6 = 64 \Rightarrow \sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{64} \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

b. $x^2 = -4 \Rightarrow$ keine Lösung in reellen Zahlen $L = \{\,\}$

4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Unbekannte Variable steht in einer ganzzahligen Potenz:

$$x^n = b, \qquad b > 0$$

2. Ungerade Exponenten:

→ Die Potenzgleichung besitzt einzige Lösung:

- ✓ $x = \sqrt[n]{b}, \quad$ wenn $b > 0$
- ✓ $x = -\sqrt[n]{b},$ wenn $b < 0$

Beispiele: *Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen*

a. $x^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$, da $\sqrt[n]{x^n} = x$ für x ungerade $\Rightarrow x = 2$ und $L = \{2\}$

b. $x^3 = -8$

Wenn wir hier die Wurzel ziehen, stoßen wir auf ein Problem, dass Radizieren ist für negative Radikanden nicht definiert ist! → Siehe weiter

4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

$x^3 = -8$??

Wir wenden einen Trick an, um das negative Vorzeichen zu beseitigen: Wir quadrieren.

$$\begin{aligned} x^3 &= -8 && \mid \text{Quadrieren} \\ (x^3)^2 &= (-8)^2 \\ x^6 &= 64 && \mid \sqrt[6]{\ } \\ \sqrt[6]{x^6} &= \sqrt[6]{64} && \mid \text{Da } n \text{ gerade ist, gilt: } \sqrt[n]{x^n} = |x| \\ |x| &= 2 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Um Scheinlösungen auszusortieren, machen wir die Probe:

$$\begin{aligned} x^3 &= -8 && \mid x_1 = -2 \\ (-2)^3 &= -8 \\ -8 &= -8 && \text{Wahre Aussage!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= -8 && \mid x_2 = 2 \\ 2^3 &= -8 \\ 8 &= -8 && \text{Falsche Aussage!} \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{-2\}.$$

https://www.mathebibel.de/potenzgleichungen