Übersicht

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

10. Funktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff

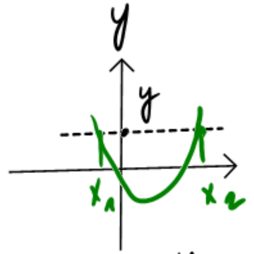
Definition

Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen variablen Größen.

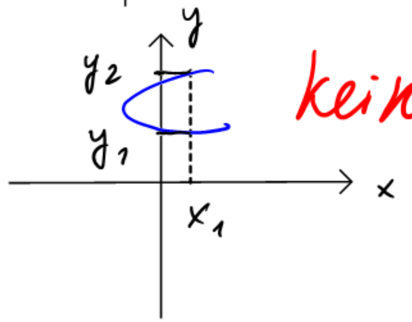
Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Zuordnungsvorschrift, die jeder reellen Zahl x aus dem Definitionsbereich D_f der Funktion eindeutig eine reelle Zahl $y = f(x)$ im Wertebereich W_f zuordnet:

$$f : D_f \rightarrow W_f$$

$x \in D_f$:	Unabhängige Variable, Argument
$y \in W_f$:	Abhängige Variable, Funktionswert



✓

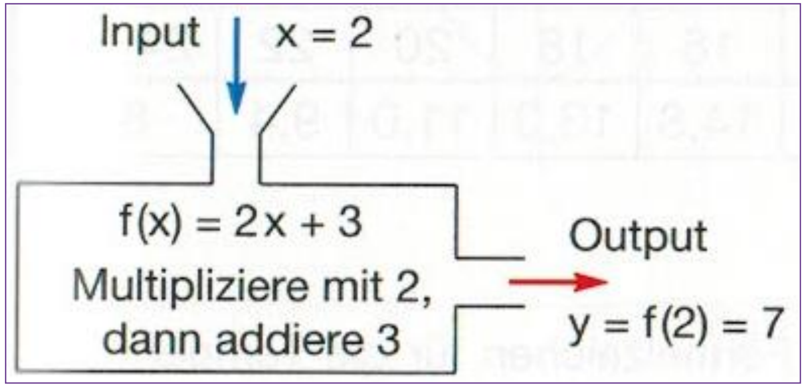


keine Fkt.

10.1 Funktionsbegriff

Darstellung durch Funktionsgleichung

Darstellungsform		Beispiel
Explizite Darstellung	$y = f(x)$	$y = x^3 - 4x$
Implizite Darstellung	$f(x, y) = 0$	$x^3 - 4x - y = 0$
Parameterdarstellung	$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$	$x = t^3 - t^2, \quad y = t^5 + t$



10.1 Funktionsbegriff

Graphische Darstellung

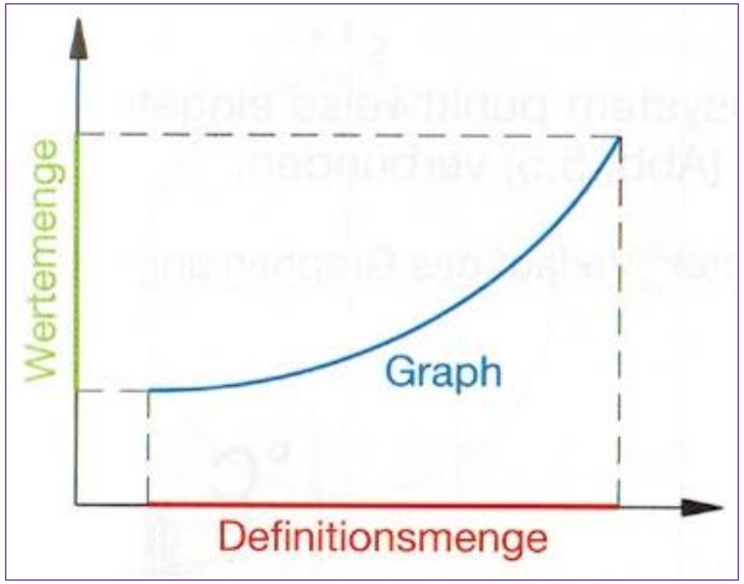
Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

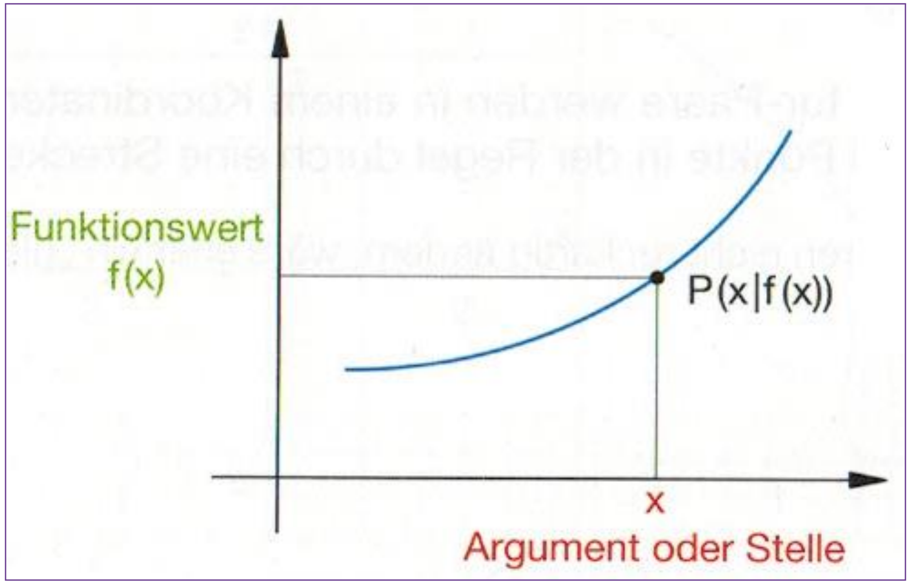
ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Alle Wertepaare oder Punkte $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ werden in ein (**kartesisches) Koordinatensystem** eingetragen:

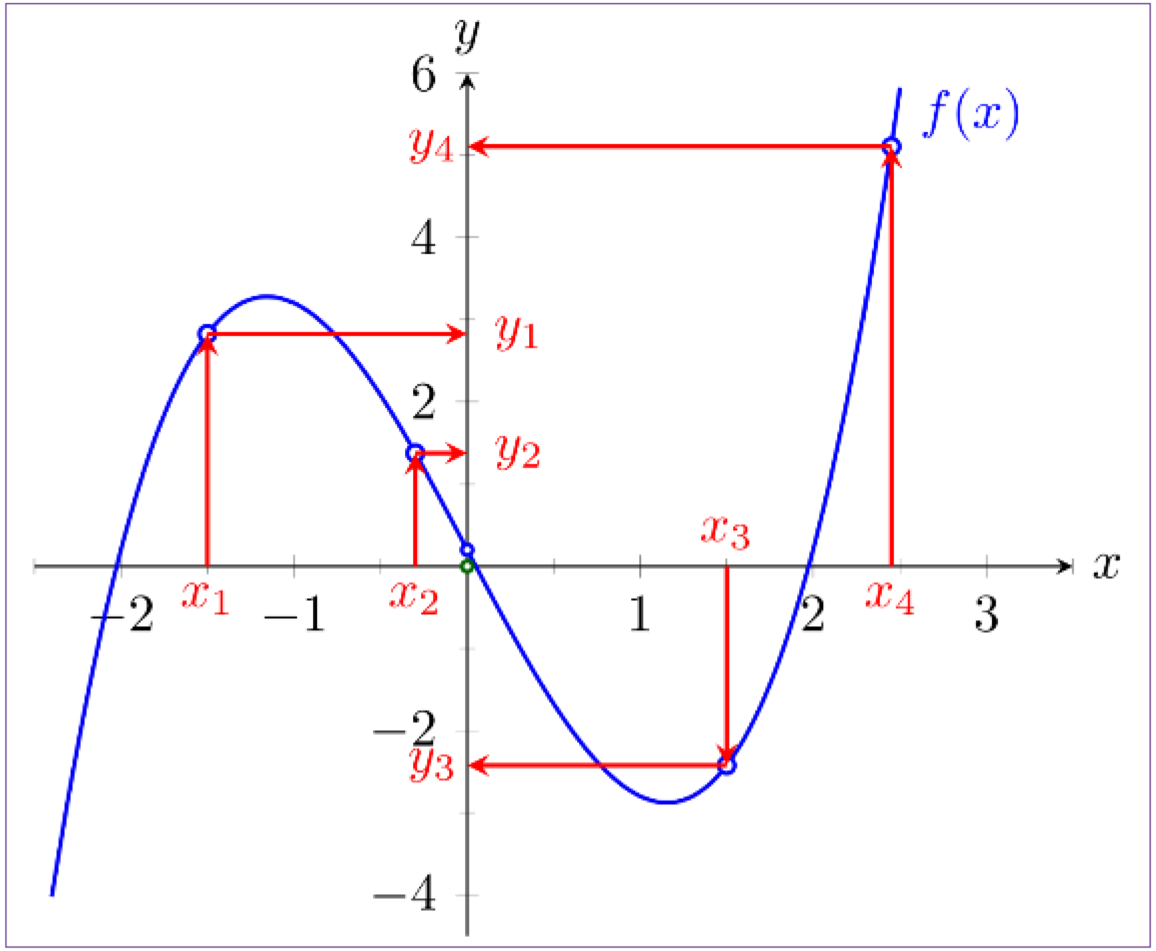
x-Achse (Abszizzenachse) $\rightarrow$ x-Werte (Abszissen)
y-Achse (Ordinatenachse) $\rightarrow$ y-Werte (Ordinaten)





10.1 Funktionsbegriff

Graphische Darstellung



Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff

Nullstellen

Die **Nullstellen** einer Funktion $f(x)$ sind die Stellen $x_0 \in D_f$, an denen die Funktion den Wert $f(x_0) = 0$ annimmt.

Oder: Eine Lösung x_0 der Gleichung $f(x) = 0$ ist eine **Nullstelle** der Funktion f(x).

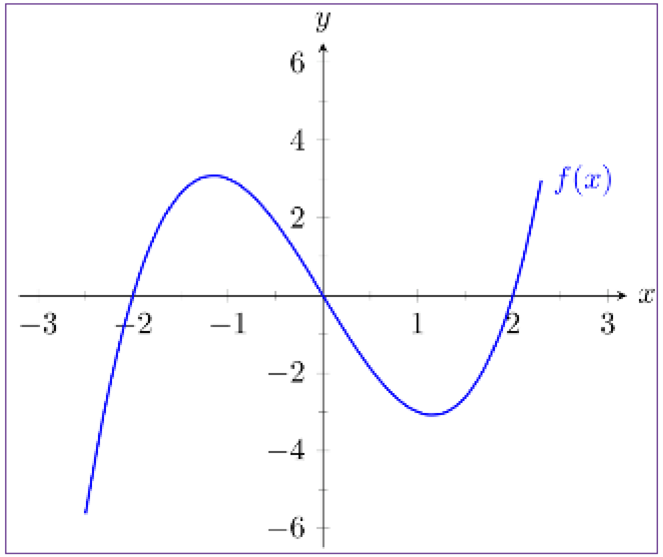
→ Die Bestimmung von Nullstellen ist gleichbedeutend mit dem Lösen von Gleichungen.

Schnittpunkt mit y-Achse: $x = 0$ $f(0) = \underline{\underline{b}}$

Beispiel: $f(x) = x^3 - 4x$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x = 0 \\ \Rightarrow\ & x(x^2-4) = 0 \\ \Rightarrow\ & x = 0 \text{ oder } x^2 - 4 = 0 \\ \Rightarrow\ & x_{0,1} = 0, \quad x_{0,2} = 2, \quad x_{0,3} = -2 \end{aligned}$$



10.2 Lineare Funktion

Definition (Gerade)

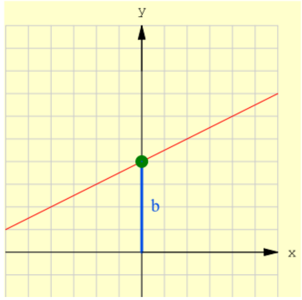
Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

Zuordnungen der Form $\boldsymbol{y = m \cdot x + b}$ mit beliebigen, konstanten Zahlen (Parametern) m und b heißen **lineare Zuordnungen** oder **lineare Funktionen**. Die x-Werte werden als Argumente (Stellen), die y-Werte als Funktionswerte bezeichnet. Lineare Funktionen stellen Geraden dar.

m - **Steigung** der Geraden

b – **Schnittpunkt mit der y -Achse** dar.

Eine lineare Funktion mit $m \neq 0$ hat genau eine Nullstelle (Lösen der Gleichung $\boldsymbol{m \cdot x + b = 0}$)



Aufgabe *Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:*

$$f_1: \; y = 3x + 6, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}. = f_2$$

Berechnen Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 2$. Welchen Funktionswert hat jeweils das Argument $x = \frac{1}{2}$?

$f_1(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 12$

$f_2(2) = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3}$.

$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots$

Aufgabe *Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:*

$$y = 3x - 2, \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}.$$

An welcher Stelle wird jeweils der Funktionswert $y = -5$ bzw. $y = \frac{2}{5}$ angenommen?

$f_1(x) = -5$

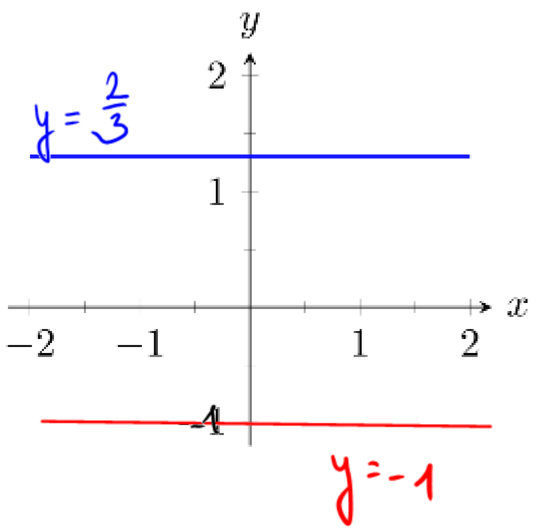
$3x - 2 = -5 \Rightarrow x = -1$

10.2 Lineare Funktion

Spezielle Funktionen

Konstante Funktion:

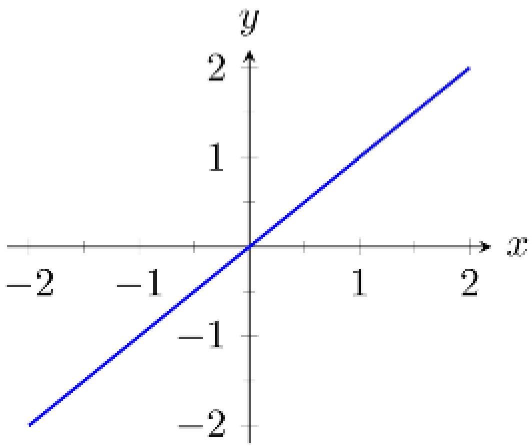
$$f(x) = y = \text{const.}$$



$y = -1$

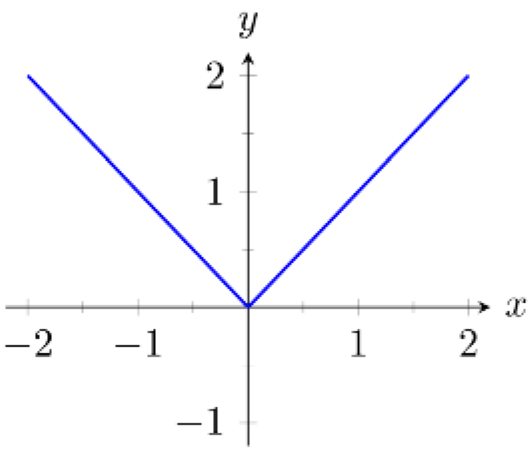
Identität:

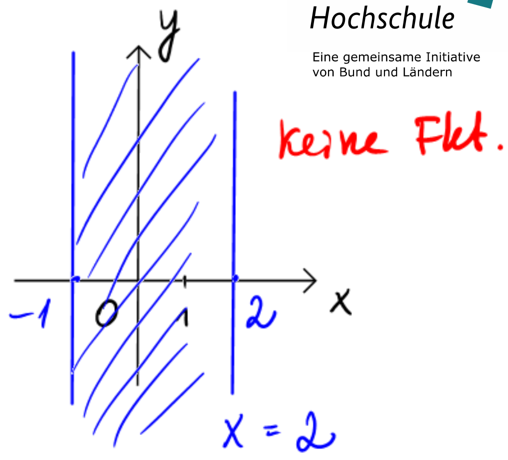
$$f(x) = y = x$$



Betragsfunktion:

$$f(x) = y = |x|$$





$-1 \leq x \leq 2$

10.2 Lineare Funktion

Funktionsgraph

$y = 3x + 1$

- Mit Wertetabelle

x	-1	0	1
y	-2	1	4

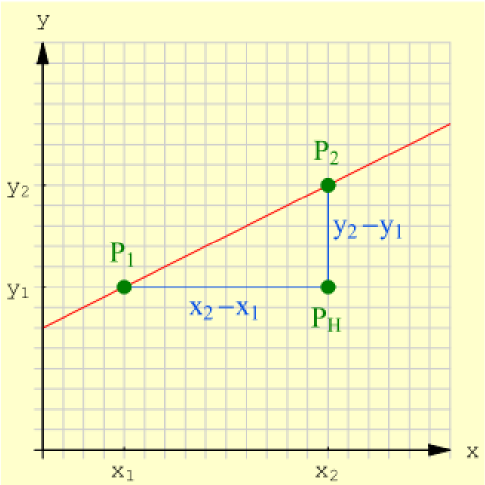
- Ohne Wertetabelle: **Achsenschnittpunkt – Steigungsdreieck**

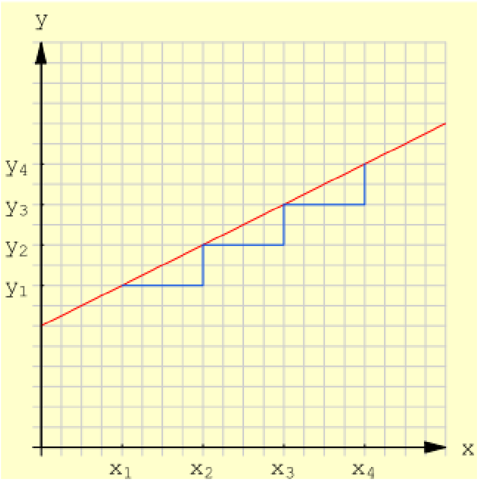
Ist eine lineare Funktion $y = mx + b$ gegeben, so gilt für zwei beliebige Argumente $x_1 \neq x_2$ mit Funktionswerten y_1 bzw. y_2 die Beziehung:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Unabhängig von den gewählten Punkten stellt sich **dasselbe Verhältnis der Differenz der Funktionswerte zur Differenz der Argumente** ein.

Die Punkte $P_1 = (x_1 | \, y_1)$ und $P_2 = (x_2 | y_2)$ kann man zusammen mit dem Hilfspunkt $P_H \; (x_2 \mid y_1)$ in ein Koordinatensystem einzeichnen und als Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks auffassen. Dieses Dreieck heißt **Steigungsdreieck**. Der Parameter m ergibt sich als Streckenverhältnis im Steigungsdreieck.





10.2 Lineare Funktion

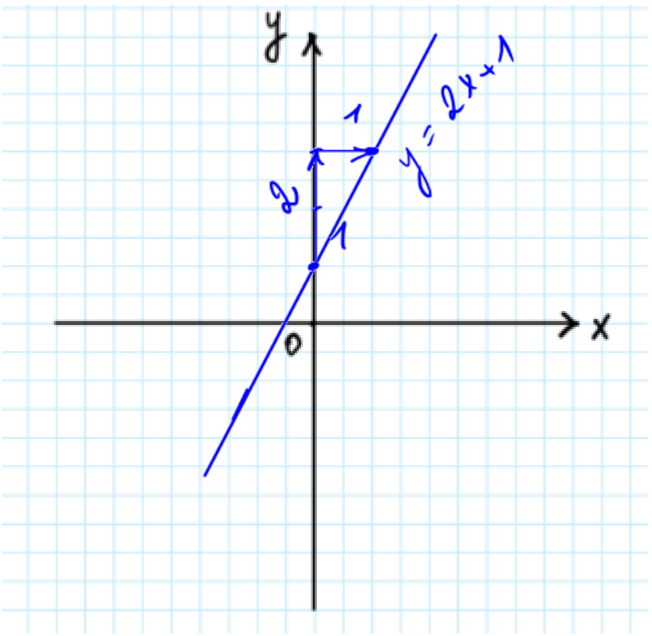
Funktionsgraph - Achsenschnittpunkt – Steigungsdreieck

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele:

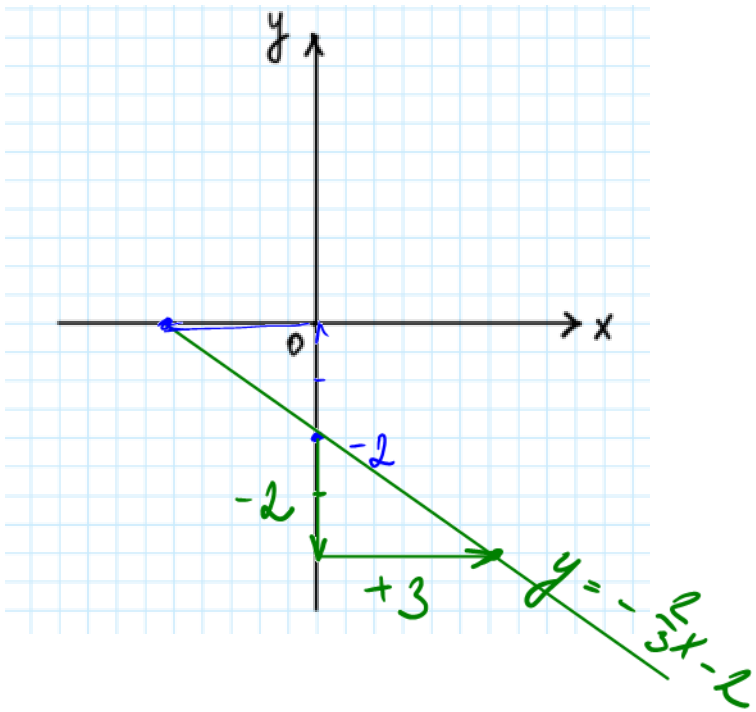
a) $y = \overset{m}{2}x + 1$ $\quad m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2 = \dfrac{2}{1}$



Beispiele:

b) $y = \underset{m}{-\dfrac{2}{3}}x - 2$ $\quad m = -\dfrac{2}{3} = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{2}{-3} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



10.2 Lineare Funktion

Zugehörigkeit eines Punktes

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Ein Punkt $P\ (x|y)$ liegt auf den Graphen einer Funktion $y = f(x)$, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Beispiel *Überprüfen Sie, ob die Punkte* $\mathrm{P}_1\ (\overset{x_1}{0} \mid \overset{y_1}{2})$ *und* $\mathrm{P}_2\ (\overset{x_2}{2} \mid \overset{y_2}{6})$ *auf dem Graphen der Funktion* $y = 5x - 4$ *liegen.*

$$\mathrm{P}_1: \quad 2 \overset{?}{=} 5 \cdot 0 - 4$$
$$2 \neq -4 \quad ✗$$
$$\mathrm{P}_2: \quad 6 \overset{?}{=} 5 \cdot 2 - 4$$
$$6 = 6 \quad \checkmark$$

Da heißt, P_1 *befindet sich nicht auf dem Funktionsgraphen,* P_2 *hingegen schon.*

10.2 Lineare Funktion

Bestimmung der Funktionsgleichung

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Punkt-Steigungsform: Sind der Punkt $\mathrm{P}\,(x_0/y_0)$ und die Steigung m einer Geraden bekannt, lautet die Geradengleichung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

oder

$$y = mx + y_0 - mx_0 = mx + b$$

Beispiel *Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch den Punkt* $\mathrm{P}\,(\overset{x_0}{3} \mid \overset{y_0}{4})$ *mit der Steigung* $m = \frac{2}{3}$.

$$y = \frac{2}{3}x + 4 - \frac{2}{3} \cdot 3 = \boxed{\frac{2}{3}x + 2}$$

$$m = \frac{2}{3} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \boxed{\frac{y-4}{x-3} = \frac{2}{3}} \quad \bigg| \cdot (x-3)$$

$$y - 4 = \frac{2}{3} \cdot (x - 3) \quad \big| + 4$$

$$y = \frac{2}{3}x \underbrace{- 2 + 4}_{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x + 2}$$

10.2 Lineare Funktion

Bestimmung der Funktionsgleichung

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Zwei-Punktform: Sind die beiden Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ bekannt, so lautet die Funktionsgleichung der durch diese Punkte verlaufenden Geraden

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$$

oder

$$\boxed{y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1 + y_1}$$

Beispiel *Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch die Punkte* $P_1(\overset{x_1}{1} \mid \overset{y_1}{2})$ *und* $P_2(\overset{x_2}{4} \mid \overset{y_2}{6})$.

$$y = \frac{6-2}{4-1}x - \frac{6-2}{4-1}\cdot 1 + 2 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{y-2}{x-1} \quad \Big| \cdot (x-1)$$

$$y - 2 = \frac{4}{3}\cdot(x-1) \quad \Big| +2$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}}$$

10.2 Lineare Funktion

Schnittpunkt von zwei Geraden

Zwei Geraden können sich in genau **einem Punkt** schneiden, **zusammenfallen** oder **parallel** sein.

Beispiel *Wir betrachten die Geraden*

?

$$y = mx + 3 \quad \text{und} \quad y = 2x + 1.$$

Ist $m = 2$*, so sind die Geraden parallel und besitzen keinen Schnittpunkt.*
Ist $m \neq 2$*, so setzen wir gleich*

$$mx + 3 = 2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad (m-2)x = -2$$

und bekommen

$$x_s = -\frac{2}{m-2}, \quad y_s = 2x_s + 1 = -\frac{4}{m-2} + 1.$$

$y = 3x + 1$

$2y = 6x + 2 \mid \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow y = 3x + 1$

10.2 Lineare Funktion

Beispiel: Stromtarife

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Die Städtischen Werke Flensburg bieten verschiedene Stromtarife an. Beim Tarif *specialpro* setzen sich die Kosten aus einer Servicepauschale von 118,32€ pro Jahr und einem Arbeitspreis von 13,08 Ct/kWh zusammen. Der Tarif *procity* besteht aus einer Servicepauschale von 58,99 € pro Jahr und einem Arbeitspreis von 17,46 Ct/kWh.

	Jahresverbrauch in kWh	Preis in €Tarif *specialpro*	Preis in €Tarif *procity*
Haushalt 1	1200	275, 28	265, 51
Haushalt 2	1300	288, 36	282, 97
Haushalt 3	1600	327, 60	338, 35
Haushalt 4	2000	379, 92	408, 19
Haushalt 5	3000	510, 72	582, 79

Übersicht über den Jahresstromverbrauch von fünf verschiedenen Haushalten mit den Kosten in zwei Tarifen.

Wenn die Städtischen Werke eine Rechnung erstellen wird der vom Kunden gewählten Tarif (*specialpro* oder *procity*), der **Jahresstromverbrauch** und der zu zahlende Betrag aufgeführt. Dieser Betrag entsteht wie folgt:

$$\boxed{\text{Arbeitspreis } €/\text{kWh} \cdot \text{Stromverbrauch kWh} + \text{Servicepauschale } € = \text{Rechnungsbetrag } €.}$$

$0,1746€/\text{kWh} \cdot 3578\text{kWh} + 58,99€ = 683,7088€.$ $\Longrightarrow$ $y = 0,1746 \cdot x + 58,99.$

Ganz analog ergibt sich im Tarif *specialpro*: $\Longrightarrow$ $y = 0,1308 \cdot x + 118,32.$

Welcher Stromtarif ist günstiger?
→ Schnittpunkt der Geraden

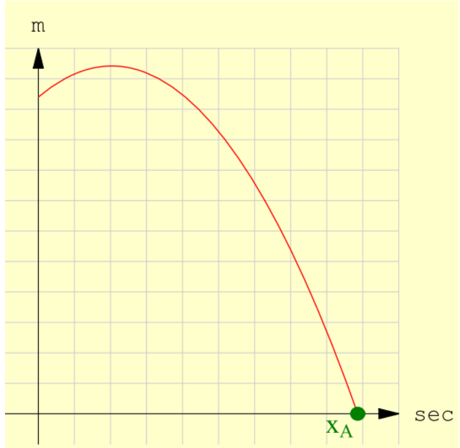
10.3 Quadratische Funktionen

Beispiel: Freier Fall

Wir stellen uns vor, dass Hermann auf dem schiefen **Turm von Pisa** einen Ball senkrecht nach oben wirft. Der Ball unterliegt der Erdanziehungskraft und fällt zu Boden. Aus dem Newtonschen Axiom

Kraft = Masse × Beschleunigung

und der Erdbeschleunigung $g = 9,81\frac{m}{s^2}$ erhält man das Weg-Zeit-Gesetz für den freien Fall.



$x_0 = 0\,(s)$ ≙ „Zeitpunkt des Bewegungsanfangs"
$x\ (s)$ ≙ „späterer Zeitpunkt"
$y\ (m)$ ≙ „Abstand vom Boden"
$y_0\ (m)$ ≙ „Anfangshöhe" → $y_0 = 52\ m$
$v_0\ (m/s)$ ≙ „Anfansgeschwindipkeit" → $v_0 = 10\ m/s$

⇒ Weg-Zeit-Gesetz

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}9,81x^2 + 10x + 52,}$$

Dieser Weg-Zeit-Gesetz beschreibt die Zuordnung **Zeit→Abstand** des Balles vom Erdboden.

10.3 Quadratische Funktionen

Definition

Eine Funktion der Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ stellt eine **allgemeine Parabel** mit dem **Scheitelpunkt S** $(x_S, |y_S)$ dar.

Eine andere Darstellungsform für Parabeln ist die **Scheitelpunktsform**:

$$\boxed{a(x - x_s)^2 + y_s}$$

„Quadratische Ergänzung“

Für die Koordinaten des Scheitelpunktes gilt dabei:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$$y_s = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Jede Parabel ist zu einer Geraden symmetrisch, die zur y -Achse parallel ist und durch den Scheitelpunkt S verläuft.

Es gilt

- $a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet.
- $a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet.

Beispiele:

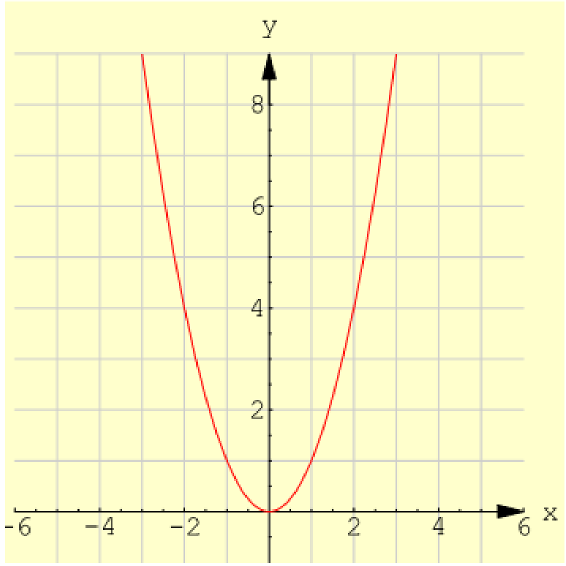
$$y_1 = 3(x - 5)^2 + 1 \quad \Rightarrow S(x_s|y_s) = (5 | 1)$$

$$y_2 = -2(x + 3)^2 - 1 \quad \Rightarrow S(x_s|y_s) = (-3 | -1)$$

x_s y_s

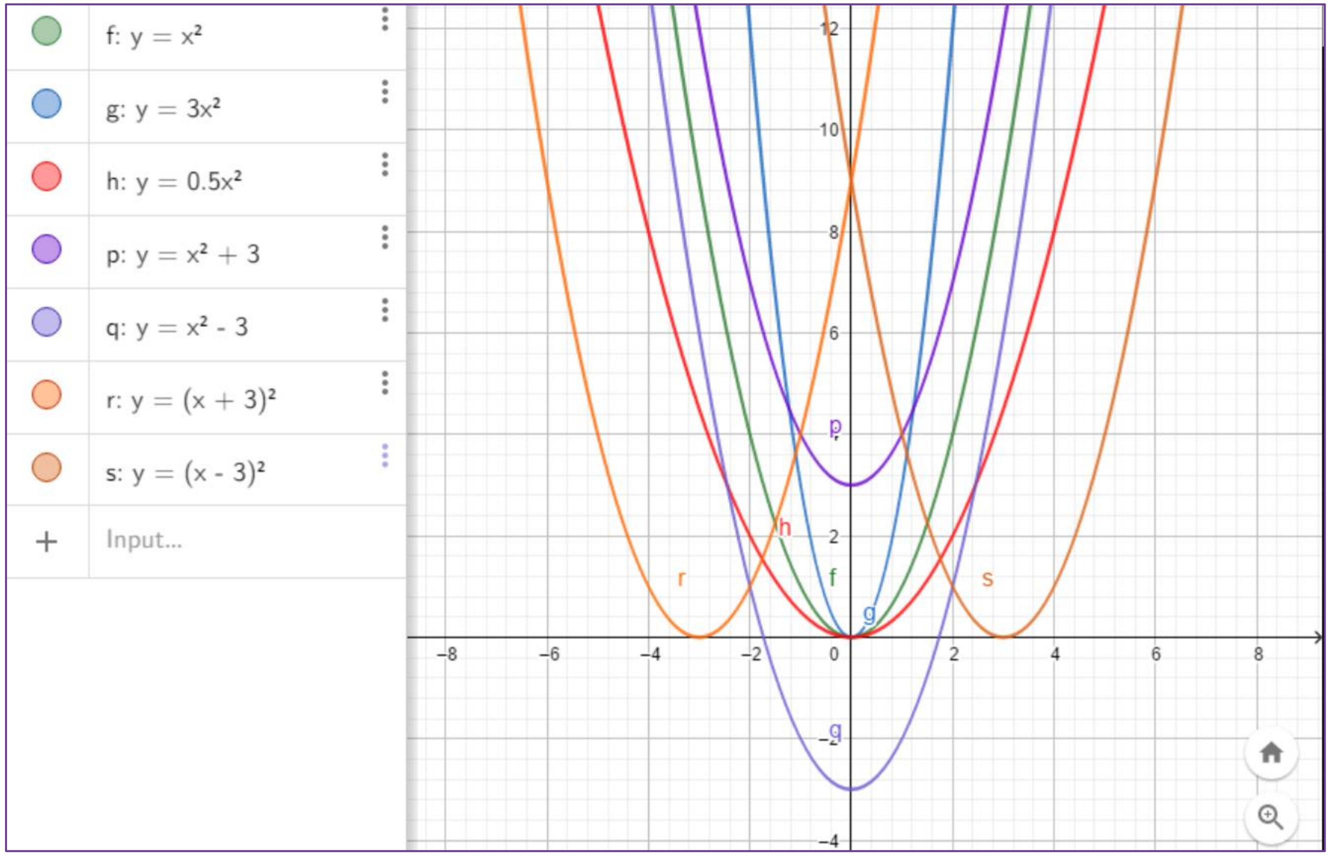
10.3 Quadratische Funktionen

Die Normalparabel



$$y = x^2$$

$$y = a(x-c)^2 + d$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

10.3 Quadratische Funktionen

Die Normalparabel

Was machen die Parameter mit der Parabel?

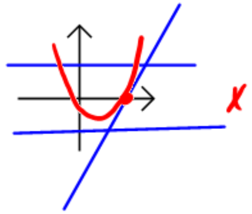
Funktionsterm	Der Parameter … bewirkt folgende Abbildung. Welche Fallunterscheidung ist sinnvoll?	
$f(x) = x^2$	Normalparabel	
$f(x) = x^2 + d$	Verschiebung der Normalparabel in Richtung der y-Achse um d	
$f(x) = (x-c)^2 + d$	Verschiebung der Normalparabel entlang der y-Achse um d und entlang der x-Achse um c	
$f(x) = a \cdot x^2$	$a = 1$	-Normalparabel
	$a > 0$	-Die Parabel nach oben geöffnet
	$a < 0$	-Spieglung an der x-Achse – die Parabel nach unten geöffnet
	$0 < \|a\| < 1$	-Die um ***a*** gestauchte Normalparabel
	$\|a\| > 1$	-Die um ***a*** gestreckte Normalparabel
$f(x) = x^2 + px + q$	Normalform einer quadratischen Funktion	

$$y = \color{red}{a}(x - \color{orange}{c})^2 + \color{purple}{d}$$

10.3 Quadratische Funktionen

Schnittpunkte von Parabel und Geraden

Beispiel *Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel* $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2}$ *mit* $g_1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



$x_1 = x_2$ $D = 0$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 9 = 0 \,|\cdot(-2) \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 9 + 18 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \\
& x_1 = 3,\ x_2 = 6
\end{aligned}
$$

Wenn die Gleichung nicht lösbar ist, dann gibt es keine Schnittpunkte!

Einsetzen ergibt $y_1 = \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2} = 1$ *und* $y_2 = \frac{1}{2}\cdot 6 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. *Die Parabel hat somit mit der Geraden* g_1 *die beiden Schnittpunkte* $\mathrm{P}_1\,(3 \mid 1)$ *und* $\mathrm{P}_2\,(6 \mid \frac{5}{2})$