Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8. Logarithmen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8.1 Rechengesetze

Definition

Wir erheben **2** zur **3**. Potenz → $\mathbf{2^3} = 8$

$a^b = c$

Wie können wir dieses Potenzieren von 2 umkehren?

„Potenzieren"
$x = a^b$
Potenz einer Zahl ausrechnen

1. Man fragt nach **Basis x**, welche, zur 3. Potenz erhoben, den Wert 8 ergibt:

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8}$$

Solche Aufgaben werden mit **Radizieren (Wurzelziehen)** gelöst.

„Wurzelziehen"
$x = \sqrt[b]{c}$
→ Basis a ausrechnen

„Logarithmieren"
$x = \log_a c$
→ Exponenten b ausrechnen

2. Man fragt nach dem **Exponenten x**, mit welchem die Basis 2 potenziert werden soll, um den Wert 8 zu ergeben:

$$2^x = 8 \Rightarrow x = \log_2 8$$

Solche Aufgaben werden durch **Logarithmieren** gelöst:

8.1 Rechengesetze

Definition

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Fragestellung:

Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen:

$10^x = 10 \Rightarrow x = 1$

$2^x = \frac{1}{128} \Rightarrow x = -7$

$1^x = 5 \Rightarrow \emptyset$

$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Für jedes $a, b > 0$ mit $a \neq 1$ hat die Gleichung $a^x = b$ genau die eine Lösung $x = \log_a b$ (sprich: „Logarithmus von b zur Basis a“). Das Ergebnis des Logarithmierens gibt also an, mit welchem Exponenten x man die Basis a potenzieren muss, um den Numerus b zu erhalten.

$a^x = b \iff x = \log_a b$

Nummerus

Basis

Spezialfälle

- Zehner-Logarithmus (dekadischer Logarithmus): $\log_{10} b = \log b = \lg b$ $\quad \lg b$
- Natürlicher-Logarithmus: $\log_e b = \ln b$ mit $e = 2,71828\ldots$ (*eulersche Zahl*) $\quad \ln b$

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

8.1 Rechengesetze

Definition

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiel:

Bestimmen Sie x indem Sie die Gleichungen in die Potenzschreibweise umwandeln:

$\log_2 32 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 32 \Leftrightarrow x = 5$

$\log_2 16 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$

$\lg 10 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$

$\lg 100 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 100 \Leftrightarrow x = 2$

normalerweise eine irrationale Zahl: $\log_5 3$

8.1 Rechengesetze

Rechenregeln

Rechenregeln

$(a, b, u, v, c > 0, a \neq 1)$:

1. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$ $\quad a^0 = 1 \quad a^1 = a$

$\ln 1 = 0, \quad \lg 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \lg 10 = 1$

2. $a^{\log_a b} = b$; $10^{\lg b} = b$; $e^{\ln b} = b$

$a^{\log_a b} = b$ „die Basen fressen sich durch"

3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$

$\log_a (u+v)$ keine Regel

4. $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

$\log_a (u-v)$ keine Regel

5. $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$

6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel"

$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} = \frac{\ln b}{\ln c}$

7. $p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

$p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

$x = \log_4 2 \Leftrightarrow 4^x = 2 = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$

8.1 Rechengesetze

Rechenregeln

** $\log_2 \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$

Rechenregeln

$(a, b, u, v, c > 0, a \neq 1)$:

1. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b$; $10^{\lg b} = b$; $e^{\ln b} = b$
3. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel"
7. $p \cdot \log_a b = \log_a(b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

* $\log_2 \frac{1}{2} \overset{5}{=} -\log_2 2 = -1$

Vereinfachen Sie die nachfolgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $\log_3(9a^4) \overset{3}{=} \log_3 9 + \log_3(a^4) \overset{7}{=} 2 + 4\log_3 a$

b) $\log_3 \frac{b^2}{27} \overset{4}{=} \log_3(b^2) - \log_3 27 = 2\log_3 b - 3$

c) $\log_2 \frac{1}{4} \overset{5}{=} -\log_2 4 = -2$

d) $\log_2 5 + \log_2 3 \overset{3}{=} \log_2(5 \cdot 3) = \log_2 15$

e) $\log_4 8 = \log_4(2^3) = 3\log_4 2 = 3\log_4(4^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}\underbrace{\log_4 4}_{=1} = \frac{3}{2}$

f) $\log_3 \frac{2}{9} - \log_3 \frac{8}{27} \overset{4}{=} \log_3\left(\frac{2}{9} : \frac{8}{27}\right) = \log_3\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{27}^{3}}{\cancel{8}_{4}}\right) = \log_3\left(\frac{3}{4}\right) \overset{4}{=} \underbrace{\log_3 3}_{1} - \log_3 4 = 1 - \log_3 4$

g) $\log_5 8 \cdot \log_5 4 = \log_5(2^3) \cdot \log_5(2^2) \overset{7}{=} 3 \cdot \log_5 2 \cdot 2 \cdot \log_5 2 = 6 \cdot (\log_5 2)^2$

h) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5 =$

$= \frac{\log_2 5}{\log_2 \frac{1}{2}} + \log_2 5 = -\cancel{\log_2 5} + \cancel{\log_2 5} = \underline{\underline{0}}$

* $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

**

8.1 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Lösungsverfahren

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Exponentialgleichungen

Lösen durch „Logarithmieren“

Logarithmische Gleichungen

Lösen durch „Entlogarithmieren“

1. $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b; 10^{\lg b} = b; e^{\ln b} = b$
3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$ mit $p \epsilon \mathbb{R}$

8.1 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Lösungsverfahren

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Exponentialgleichungen

Lösen durch „Logarithmieren“

$2^x = 5 \quad | \log_2$

$\Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x \log_2 2 = \log_2 5$

$\Rightarrow x = \log_2 5$

oder 2. Möglichkeit:

$2^x = 5 \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln(2^x) = \ln 5$

$\Rightarrow x \ln 2 = \ln 5$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

Basiswechsel

Logarithmische Gleichungen

Lösen durch „Entlogarithmieren“

1. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b$; $10^{\lg b} = b$; $e^{\ln b} = b$
3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

8.1 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Lösungsverfahren

Exponentialgleichungen

Lösen durch „Logarithmieren“

$2^x = 5 \quad | \log_2$

$\Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x \log_2 2 = \log_2 5$

$\Rightarrow x = \log_2 5$

oder 2. Möglichkeit:

$2^x = 5 \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln(2)^x = \ln 5$

$\Rightarrow x \ln 2 = \ln 5$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$5^{x+5} = 2 \quad | \log_5$

$\Rightarrow \log_5(5)^{x+5} = \log_5 2$

$\Rightarrow x + 5 = \log_5 2$

$\Rightarrow x = \log_5 2 - 5$

oder 2. Möglichkeit:

$5^{x+5} = 2 \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln(5^{x+5}) = \ln 2$

$\Rightarrow (x+5) \cdot \ln 5 = \ln 2 \quad \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5} - 5$

$x + 5 = \frac{\ln 2}{\ln 5} \quad | -5$

$x = \frac{\ln 2}{\ln 5} - 5.$

Logarithmische Gleichungen

Lösen durch „Entlogarithmieren“

1. $\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b;\ 10^{\lg b} = b;\ e^{\ln b} = b$
3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8.1 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Lösungsverfahren

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Exponentialgleichungen

Lösen durch „Logarithmieren“

$2^x = 5 \quad | \log_2$

$\Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x \log_2 2 = \log_2 5$

$\Rightarrow x = \log_2 5$

oder 2. Möglichkeit:

$2^x = 5 \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln(2)^x = \ln 5$

$\Rightarrow x \ln 2 = \ln 5$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$5^{x+5} = 2 \quad | \log_5$

$\Rightarrow \log_5(5)^{x+5} = \log_5 2$

$\Rightarrow x + 5 = \log_5 2$

$\Rightarrow x = \log_5 2 - 5$

oder 2. Möglichkeit:

$5^{x+5} = 2 \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln(5^{x+5}) = \ln 2$

$\Rightarrow (x+5) \cdot \ln 5 = \ln 2 \quad \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5} - 5$

Logarithmische Gleichungen

Lösen durch „Entlogarithmieren“

(für $x > 0$)

$\lg x = 2 \quad |$ beide Seiten der Gleichung zur Basis 10 erheben

$\Rightarrow 10^{\lg x} = 10^2$

$\Rightarrow x = 100$

---

1. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b$; $10^{\lg b} = b$; $e^{\ln b} = b$
3. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a(b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

8.1 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Lösungsverfahren

Exponentialgleichungen

Lösen durch „Logarithmieren"

$2^x = 5 \quad | \ \log_2$

$\Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x \log_2 2 = \log_2 5$

$\Rightarrow x = \log_2 5$

oder 2. Möglichkeit:

$2^x = 5 \quad | \ \ln$

$\Rightarrow \ln(2)^x = \ln 5$

$\Rightarrow x \ln 2 = \ln 5$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$5^{x+5} = 2 \quad | \ \log_5$

$\Rightarrow \log_5(5)^{x+5} = \log_5 2$

$\Rightarrow x + 5 = \log_5 2$

$\Rightarrow x = \log_5 2 - 5$

oder 2. Möglichkeit:

$5^{x+5} = 2 \quad | \ \ln$

$\Rightarrow \ln\left(5^{x+5}\right) = \ln 2$

$\Rightarrow (x+5) \cdot \ln 5 = \ln 2 \quad \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5} - 5$

Logarithmische Gleichungen

Lösen durch „Entlogarithmieren"

(für $x > 0$)

$\lg x = 2 \quad |$ beide Seiten der Gleichung zur Basis 10 erheben

$\Rightarrow 10^{\lg x} = 10^2$

$\Rightarrow x = 100$

(für $x > 0$)

$\ln \frac{x}{2} = -0{,}4 \quad |$ beide Seiten zur Basis e erheben: e°

$\Rightarrow e^{\ln \frac{x}{2}} = e^{-0{,}4}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = e^{-\frac{2}{5}} \quad \Rightarrow x = 2 \cdot e^{-\frac{2}{5}}$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1. $\log_a 1 = 0; \ \log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b; \ 10^{\lg b} = b; \ e^{\ln b} = b$
3. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel"
7. $p \cdot \log_a b = \log_a(b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $\cap$ Durchschnitt

8.1 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Lösungsverfahren

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Exponentialgleichungen

Lösen durch „Logarithmieren“

$2^x = 5 \quad | \log_2$

$\Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x \log_2 2 = \log_2 5$

$\Rightarrow x = \log_2 5$

oder 2. Möglichkeit:

$2^x = 5 \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln(2)^x = \ln 5$

$\Rightarrow x \ln 2 = \ln 5$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$5^{x+5} = 2 \quad | \log_5$

$\Rightarrow \log_5(5)^{x+5} = \log_5 2$

$\Rightarrow x + 5 = \log_5 2$

$\Rightarrow x = \log_5 2 - 5$

oder 2. Möglichkeit:

$5^{x+5} = 2 \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln\left(5^{x+5}\right) = \ln 2$

$\Rightarrow (x+5) \cdot \ln 5 = \ln 2 \quad \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5} - 5$

Logarithmische Gleichungen

Lösen durch „Entlogarithmieren“

(für $x > 0$)

$\lg x = 2 \quad |$ beide Seiten der Gleichung zur Basis 10 erheben

$\Rightarrow 10^{\lg x} = 10^2$

$\Rightarrow x = 100$

(für $x > 0$)

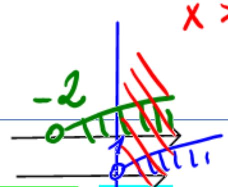
$\ln \frac{x}{2} = -0{,}4 \quad |$ beide Seiten zur Basis e erheben: e°

$\Rightarrow e^{\ln \frac{x}{2}} = e^{-0{,}4}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = e^{-\frac{2}{5}} \quad \Rightarrow x = 2 \cdot e^{-\frac{2}{5}}$

$x > 1$

Durchschnitt



$\ln(2x+4) + \ln(x-1) = 3$

Es gilt: $2x + 4 > 0 \wedge x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x > 1 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

$\Rightarrow \ln\left((2x+4) \cdot (x-1)\right) = 3 \quad |$ beide Seiten zur Basis e erheben: e°

$\Rightarrow e^{\ln((2x+4) \quad (x-1))} = e^3$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 4x - 4 = e^3 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 - e^3 = 0 \rightarrow$ Quadratische Glg

Lösungen $x_1 \approx 3{,}0061$ und $x_2 \approx -4{,}0061 \notin D$

$\Rightarrow L = \{3{,}0061\}$

1. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b$; $10^{\lg b} = b$; $e^{\ln b} = b$
3. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a(b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

8.1 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Beispiele

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $10^{1-x} = \frac{1}{100} \quad | \lg$

$\lg 10^{1-x} = \lg \frac{1}{100}$

$1-x = -\lg 100$

$1-x = -2 \Rightarrow x = 3$

b) $\left(49\sqrt{7}\right)^x = 49$

$\left(\underbrace{7^2 \cdot 7^{\frac{1}{2}}}\right)^x = 7^2$

$7^{\frac{5}{2}x} = 7^2 \quad | \log_7$

$\log_7 7^{\frac{5}{2}x} = \log_7 7^2 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$

c) $\lg x = \frac{1}{4}$

$10^{\frac{1}{4}} = x = \sqrt[4]{10}$

$x > 0$

$D: \; 2x-1>0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

d) $\log_5(2x-1) = 2 \quad | 5^{\circ}$

$5^{\log_5(2x-1)} = 5^2$

$2x-1 = 25 \Rightarrow x = \frac{26}{2} = 13$ ✓

e) $\log_2 x^2 = 3 \quad | 2^{\circ}$ $\quad D: x>0$

$2^{\log_2 x^2} = 2^3$

$x^2 = 8 \Rightarrow$ $x_1 = \sqrt{8}$

$x_2 = -\sqrt{8} \notin D$

f) $\ln x = \frac{1}{2}\ln 49 - \frac{1}{3}\ln 125$

$\ln x = \ln(49)^{\frac{1}{2}} - \ln(125)^{\frac{1}{3}}$

$\ln x = \ln 7 - \ln 5$

$\ln x = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \quad | e^{\circ}$

$x = \frac{7}{5}$

1. $\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b;\ 10^{\lg b} = b;\ e^{\ln b} = b$
3. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel"
7. $p \cdot \log_a b = \log_a(b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern