

Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. **Integral – Grundbegriffe**



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15. Integral – Grundbegriffe



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule** 
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Einführung

- Grundvorstellungen der Integralrechnung:
 - Berechnung von **Flächen-** oder allgemeiner **Volumenmaßen**
 - Integrieren als **Umkehrabbildung** des **Differenzierens**
- Beide Definitionen sind gleichwertig.
- Der erste Sachverhalt wird durch die "**Riemann'schen Summen**" repräsentiert.
- Der Zweite durch den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion

- Die Aufgabe der **Differentialrechnung**:

Von einer Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $y' = f'(x)$ zu ermitteln;

- Die Aufgabe der **Integralrechnung**:

Zu einer **Ableitungsfunktion** $f(x) = F'(x)$ die **ursprüngliche Stammfunktion** $F(x)$ zu finden.

- Die einfachsten Fälle sieht man sofort:

$F'(x)$ gegeben	$F(x)$ gesucht
e^x	e^x
$2x$	x^2
$\sin x + \cos x$	$-\cos x + \sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
a	ax

Handwritten notes showing the relationship between trigonometric functions and their antiderivatives:

$$\begin{array}{l} \swarrow \sin x \quad \text{Stammfkt.} \\ -\cos x \quad \swarrow \cos x \\ \searrow -\sin x \end{array}$$

$$(ax)' = a$$

$$(2x)' = 2$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion

- Die Aufgabe der **Differentialrechnung**:

Von einer Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $y' = f'(x)$ zu ermitteln;

- Die Aufgabe der **Integralrechnung**:

Zu einer **Ableitungsfunktion** $f(x) = F'(x)$ die **ursprüngliche Stammfunktion** $F(x)$ zu finden.

- Die einfachsten Fälle sieht man sofort:

$F'(x)$ gegeben	$F(x)$ gesucht
e^x	e^x
$2x$	x^2
$\sin x + \cos x$	$-\cos x + \sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
a	ax

Ist $F(x)$ gefunden, dann ist $F(x) + C$ auch eine **Stammfunktion**, denn die Ableitung einer Konstante ist gleich Null: $(F(x) + C)' = F'(x)$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion

- Die Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist, nennen wir **Stammfunktion zu f** .
- Die Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ schreibt man auch

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$\int f(t) dt$$

$$\iint f(x, y) dx dy$$

- Die **rechte Seite** dieser Gleichung nennt man **unbestimmtes Integral**.
- Jede Stammfunktion ist bis auf **eine Konstante eindeutig**. Denn es gilt:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = F'(x)$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion - **Beispiel**

- $f(x) = 2x$ ist linear

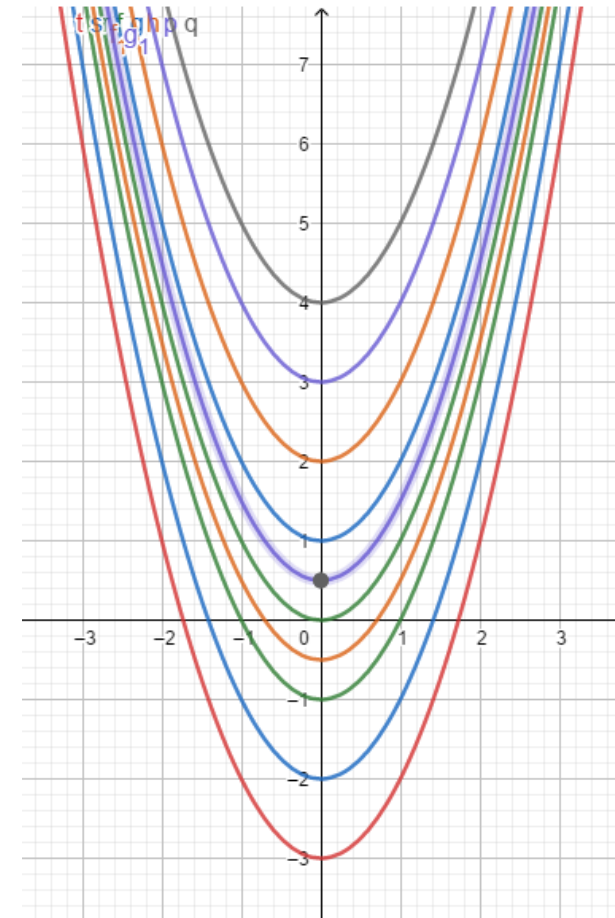
Gesucht: alle $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = 2x$ bzw.

$$F(x) = \int 2x \, dx$$

Dies sind quadratische Funktionen:

$$F(x) = x^2 + \underline{\underline{C}} \quad C \in \mathbb{R}$$

- Geometrisch bedeutet es eine **Kurvenschar von Normalparabeln**, die entlang der y -Achse um C verschoben sind.



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^5 dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C = \frac{1}{6} x^6 + C$$

$$\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{1}{\frac{1}{5}+1} x^{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}} + C$$

- Die Menge aller unbestimmten Integrale

der Funktion $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$f(x) = \text{"Integrand"}$$

$$C = \text{"Integrationskonstante"}$$

$$(x^p)' = p x^{p-1}$$

- Angabe des Integrals **ohne** konkrete Integrationsgrenzen.
- Grundintegrale** kann man erraten, sollte aber auswendig lernen!

$f(x)$	$F(x)$
x^p	$\frac{1}{p+1} x^{p+1}$ $p \in \mathbb{Q} / \cancel{-1}$ vorausgesetzt $p \neq -1$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$ für jedes $a > 0, a \neq 1$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int 0 dx = C \quad C' = 0$$

$$\int 1 dx = x + C \quad \int 1 dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C, \quad n = -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \text{ und } a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale - Formelkärtchen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + C$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}$	$\ln(\sqrt{(x-a)^2+b^2}) + C$	$\frac{1}{(x-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b} \arctan(\frac{x-a}{b}) + C$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule



Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale - Beispiele

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $\int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + C$

$x-1 > 0$
 $x > 1$ b) $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) + C \Rightarrow (\ln(x-1) + C)' = \frac{1}{x-1}$

$2-x > 0$
 $x < 2$ c) $\int \frac{1}{2-x} dx = -\ln(2-x) + C \Rightarrow (\ln(2-x) + C)' = \frac{1}{2-x} \cdot (-1)$

$2x-1 > 0$
 $x > \frac{1}{2}$ d) $\int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C \Rightarrow (\ln(2x-1) + C)' = \frac{1}{2x-1} \cdot (2)$

e) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

f) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$

g) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

$f(x)$	$F(x)$
① x^p	$\frac{1}{p+1} x^{p+1}$ vorausgesetzt $p \neq -1$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$ für jedes $a > 0, a \neq 1$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.2 Rechenregeln

Überblick

1. Faktorregel: Ein konstanter Faktor k darf vor das Integral gezogen werden.

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad \int 5 \cos x dx = 5 \int \cos x dx$$

2. Summenregel: Eine Summe von Funktionen darf summandenweise integriert werden.

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

3. Partielle Integration: Die partielle Integration kann verwendet werden, wenn man ein Produkt zweier Funktionen integriert. Sie leitet sich aus der Produktregel der Differentialrechnung her.

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int f(x) \cdot G'(x) dx \quad \text{Dabei gilt } F'(x) = f(x) \text{ und } G'(x) = g(x).$$

Beispiel:

$$\int (x^4 - 5x^3 - 1) dx = \int x^4 dx - 5 \int x^3 dx - \int dx = \frac{1}{5} x^5 - \frac{5}{4} x^4 - x + c$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

$$\int \ln x \cdot \ln(x+5) dx \neq \int \cdot \int$$

15.2 Rechenregeln

Produktregel - Partielle Integration

$$\int F \cdot g \, dx =$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.2 Rechenregeln

Produktregel - Partielle Integration

Suche die Stammfunktion

$$\int F \cdot g \, dx = F \cdot G - \int f \cdot G \, dx$$

Leite den Faktor ab

mit $F' = f$ und $G' = g$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.2 Rechenregeln

Produktregel - Partielle Integration

Suche die Stammfunktion

$$\int F \cdot g \, dx = F \cdot G - \int f \cdot G \, dx$$

Leite den Faktor ab

mit $F' = f$ und $G' = g$

Beispiel:

$$\int x^3 \ln x \, dx =$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.2 Rechenregeln

Produktregel - Partielle Integration

Suche die Stammfunktion

$$\int F \cdot g \, dx = F \cdot G - \int f \cdot G \, dx$$

Leite den Faktor ab

mit $F' = f$ und $G' = g$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \underbrace{\ln x}_F \cdot \frac{1}{4} x^4 - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_f \cdot \frac{1}{4} x^4 \, dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} x^4 + C \\ &= \frac{1}{4} x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned} F = \ln x &\Rightarrow F' = f = \frac{1}{x} \\ g = x^3 &\Rightarrow G = \frac{1}{4} x^4 \end{aligned}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.2 Rechenregeln

Produktregel - Partielle Integration

Suche die Stammfunktion

$$\int F \cdot g \, dx = F \cdot G - \int f \cdot G \, dx$$

Leite den Faktor ab

mit $F' = f$ und $G' = g$ **Beispiel:**

$$\int x^3 \ln x \, dx =$$

$$\begin{aligned} &= \ln x \cdot \left(\frac{1}{4} x^4 \right) - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{4} x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C \\ &= \frac{1}{16} x^4 (4 \ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$F = \ln x \Rightarrow F' = f = \frac{1}{x}$$

$$g = x^3 \Rightarrow G = \frac{1}{4} x^4$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

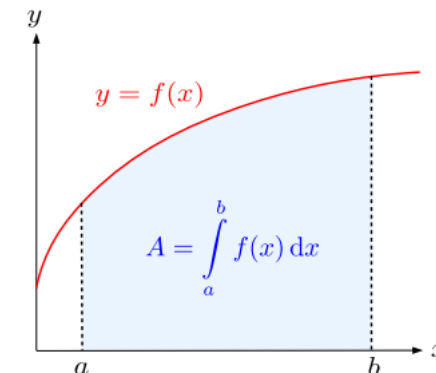
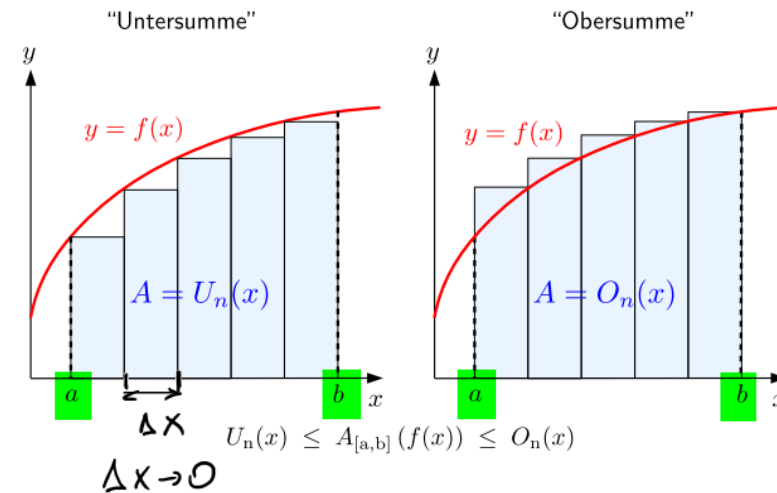
Flächenbestimmung – Das bestimmte Integral

- Die Integralrechnung ist ursprünglich geometrisch motiviert (wie viele andere Probleme aus der Analysis)
- Näherungen für den Flächeninhalt** zwischen einem Funktionsgraphen und der x -Achse zwischen den senkrechten Geraden durch $(a|0)$ und $(x|0)$ mit Hilfe der:
 - „**Untersumme**“ – der Flächeninhalt **unter** dem Graphen von $f(x)$
 - „**Obersumme**“ – der Flächeninhalt **über** dem Graphen von $f(x)$
- Integral als Summe **infinitesimal** kleiner Unterteilungen von $[a, b]$:

Bestimmtes Integral von $f(x)$ in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$:

$$A = I = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k_i) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

- Die Funktion $f(x)$ heißt **Integrand**, a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**



Riemann'sche
Summen



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

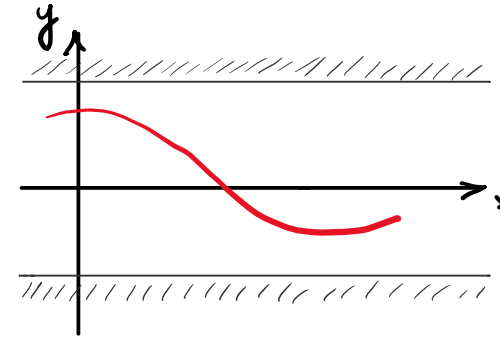
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung – Integrierbarkeit

- Eine Funktion ist in $[a, b]$ nur dann integrierbar, wenn sie in $[a, b]$ beschränkt ist
- **Jede** in $[a, b]$ **stetige oder stückweise stetige Funktion** mit endlich vielen Sprungstellen ist integrierbar
- Ist eine **Funktion** im Intervall $[a, b]$ **negativ**, d.h. $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch das bestimmte Integral negativ:

$$I = \int_a^b f(x) dx < 0$$



Beschränkt: Kurve in einem zur x -Achse parallelen Streifen



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

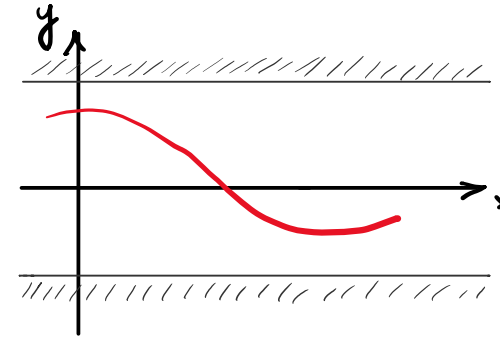
15.3 Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung – Integrierbarkeit

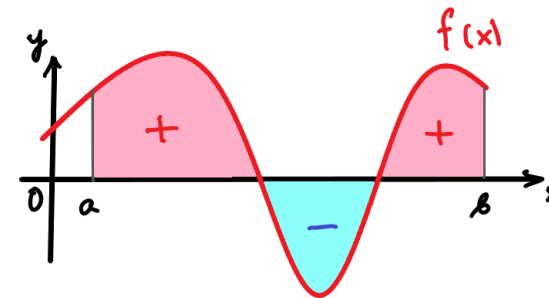
- Eine Funktion ist in $[a, b]$ nur dann integrierbar, wenn sie in $[a, b]$ beschränkt ist
- **Jede** in $[a, b]$ **stetige oder stückweise stetige Funktion** mit endlich vielen Sprungstellen ist integrierbar
- Ist eine **Funktion** im Intervall $[a, b]$ **negativ**, d.h. $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch das bestimmte Integral negativ:

$$I = \int_a^b f(x) dx < 0$$

- Das **bestimmte Integral** ist somit **vorzeichenbehaftet**, d.h. die Flächenanteile **unterhalb** der x -Achse werden als **negativ** gezählt.



Beschränkt: Kurve in einem zur x -Achse parallelen Streifen



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

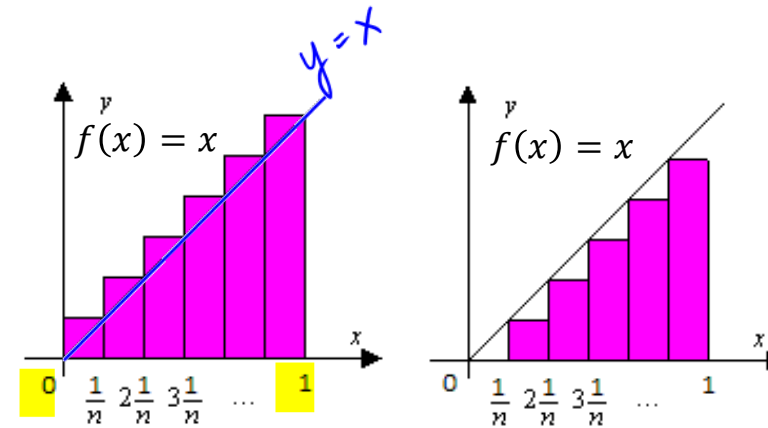
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung – Das bestimmte Integral

Beispiel: Wir berechnen

$$\int_0^1 x dx$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung – Das bestimmte Integral

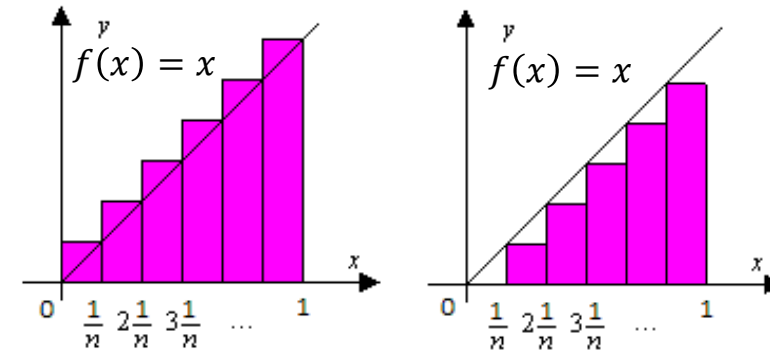
Beispiel: Wir berechnen

$$\int_0^1 x dx$$

Die Funktion ist stetig. Deshalb kann man bei der Wahl der Parameter für die Riemann'sche Summe recht großzügig sein.

Wir teilen Intervall $[0,1]$ in n gleiche Abschnitte. Wir definieren für einen beliebigen Punkt der Aufteilung $x_k = \frac{1}{n} \cdot k$

Damit ist die Länge einer Aufteilung des Intervalls: $\Delta x_k = \frac{1}{n}$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung – Das bestimmte Integral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Wir berechnen

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} 1^2 - \frac{1}{2} 0^2 = \frac{1}{2}$$

Die Funktion ist stetig. Deshalb kann man bei der Wahl der Parameter für die Riemann'sche Summe recht großzügig sein.

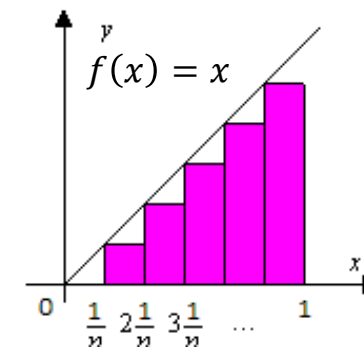
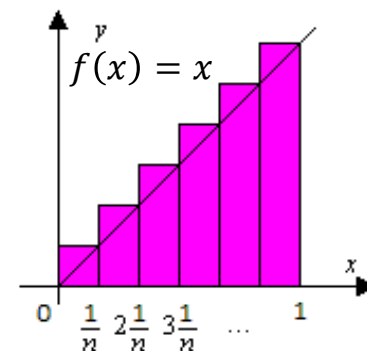
Wir teilen Intervall $[0,1]$ in n gleiche Abschnitte. Wir definieren für einen beliebigen Punkt der Aufteilung $x_k = \frac{1}{n} \cdot k$

Damit ist die Länge einer Aufteilung des Intervalls: $\Delta x_k = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\prod_{k=1}^5 k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$



Gaußsche Summenformel:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung – Das bestimmte Integral

Beispiel: Wir berechnen

$$\int_0^1 x dx$$

Die Funktion ist stetig. Deshalb kann man bei der Wahl der Parameter für die Riemann'sche Summe recht großzügig sein.

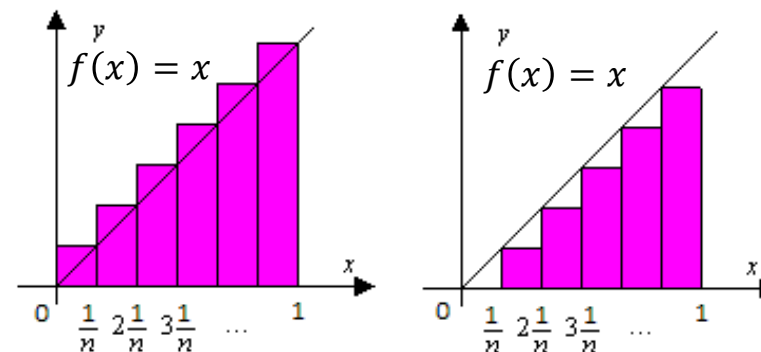
Wir teilen Intervall $[0,1]$ in n gleiche Abschnitte. Wir definieren für einen beliebigen Punkt der Aufteilung $x_k = \frac{1}{n} \cdot k$

Damit ist die Länge einer Aufteilung des Intervalls: $\Delta x_k = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Wir lassen nun $n \rightarrow \infty$ und es gilt $F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$

Dieses Ergebnis ist offensichtlich richtig.



Gaußsche Summenformel:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n &= \\ = \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Hauptsatz der Integralrechnung

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

das **bestimmte Integral** von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$

Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx$:

- 1) Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ zum Integranden $f(x)$
- 2) Berechnung der Werte $F(a)$ und $F(b)$ an den Integrationsgrenzen a und b
- 3) Berechnung der Differenz $F(b) - F(a)$

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = [F(x)]_a^b = \underline{F(b) - F(a)}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

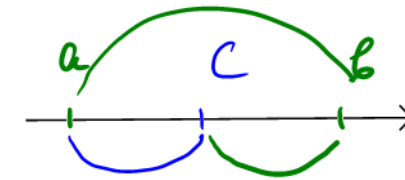
15.3 Bestimmtes Integral

Eigenschaften

Zerlegung des Integrationsintervalls in Teilintervalle:

Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

**Vertauschung der Integrationsgrenzen:**

Vertauschen der beiden Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

Für $a = b$ ist der Integralwert gleich Null: $\int_a^a f(x) \, dx = 0$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Hauptsatz der Integralrechnung - Aufgaben

$$\ln(-x) = -\ln(x)$$

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Berechnen Sie:

$$a) \int_1^2 \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^2 x^{-2} = \left[3 \cdot \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right]_1^2 = -3 \frac{1}{x} \Big|_1^2 = -3 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$b) \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} \right]_0^8 = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = \frac{3}{4} \cdot 8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \cdot 0^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{8} \right)^4 = \frac{3}{4} \cdot 2^4 = \frac{3 \cdot 16}{4} = \underline{\underline{12}}$$

$$c) \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \sin(0) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$d) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-2}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-2| = \ln 1 - \ln 2 = \underline{\underline{-\ln 2}} = \ln(2^{-1}) = \underline{\underline{\ln \frac{1}{2}}}$$

$$e) \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \Big|_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\int y^3 dx = y^3 \int dx = y^3 x + C$$

$$\int x^3 dy = x^3 y + C$$

$$\int 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + C$$

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$1.) \int_0^1 x \, dx = \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^1 = \frac{1}{2} 1^2 - \frac{1}{2} 0^2 = \frac{1}{2}$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

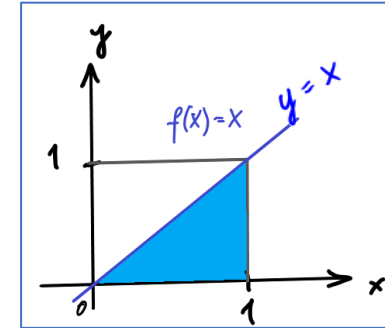
**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned} 1.) \int_0^1 x \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**



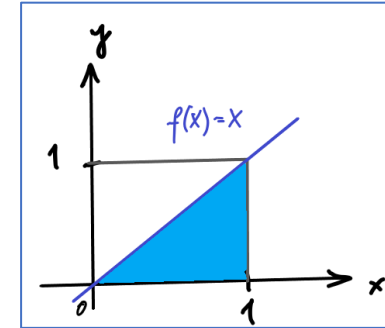
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned} 1.) \int_0^1 x \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2.) \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

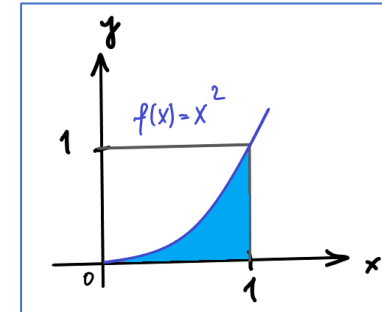
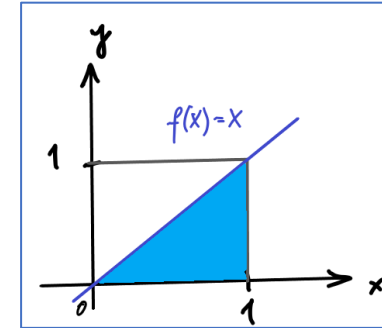
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned} 1.) \int_0^1 x \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \int_0^1 x^2 \, dx &= \\ &= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

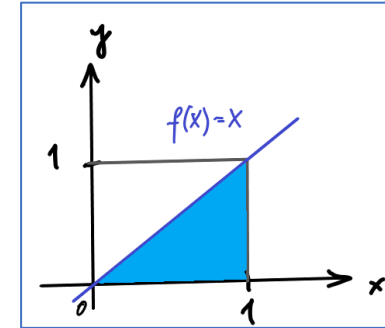
**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

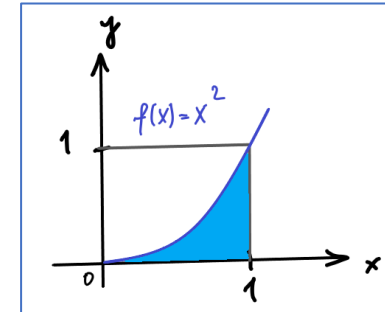
15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned}
 1.) \int_0^1 x \, dx &= \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2.) \int_0^1 x^2 \, dx &= \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$



$$3.) \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = -[-2] = \underline{\underline{2}}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$1.) \int_0^1 x \, dx =$$

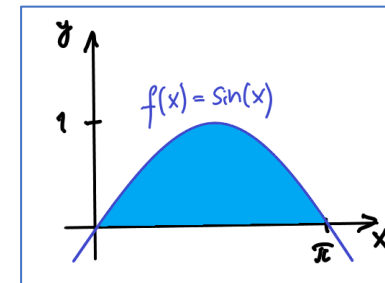
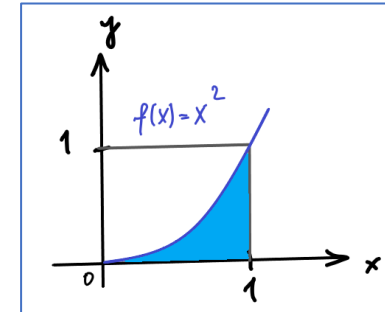
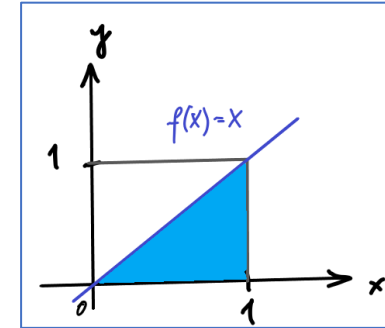
$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$

$$2.) \int_0^1 x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

$$3.) \int_0^\pi \sin x \, dx =$$

$$= -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

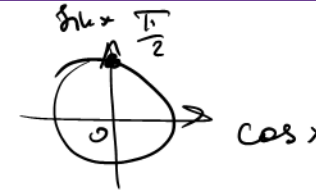
ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral



$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$4.) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = - \left[\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^0 - \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0} \right] = \underline{\underline{0}}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned} 4.) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= \\ &= -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

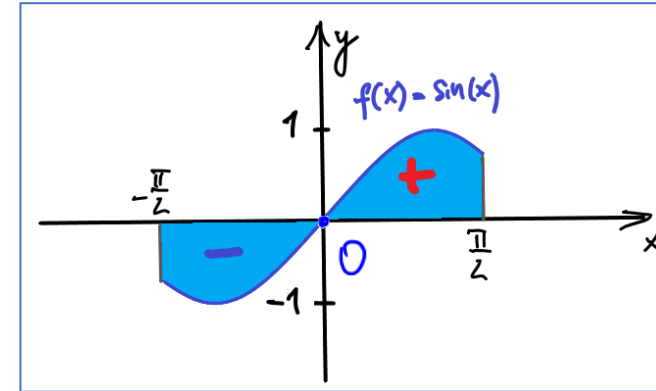
ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule** 
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned} 4.) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= \\ &= -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

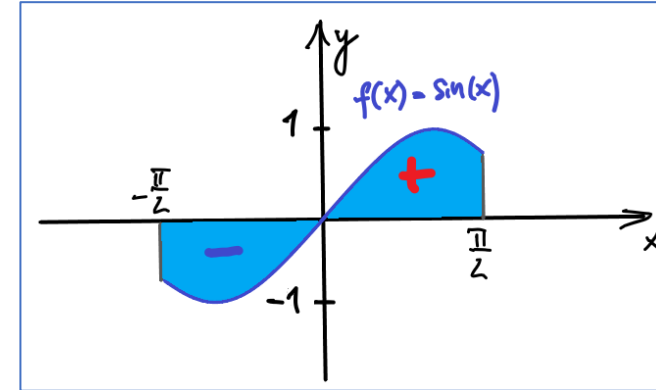
ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned}
 4.) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= \\
 &= -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 - 0 = 0
 \end{aligned}$$



Mit der Nullstelle $x = 0$ erhalten wir als **nicht vorzeichenbehaftete** Fläche:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \, dx \right| + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right| + \left| -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| \\
 &= \left| -[\cos(0) - \overbrace{\cos(-\frac{\pi}{2})}^{\cos(\frac{\pi}{2})}] \right| + \left| -[\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0] \right| \\
 &= \left| -[1 - 0] \right| + \left| -[0 - 1] \right| \\
 &= |-1| + |1| = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}
 \end{aligned}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

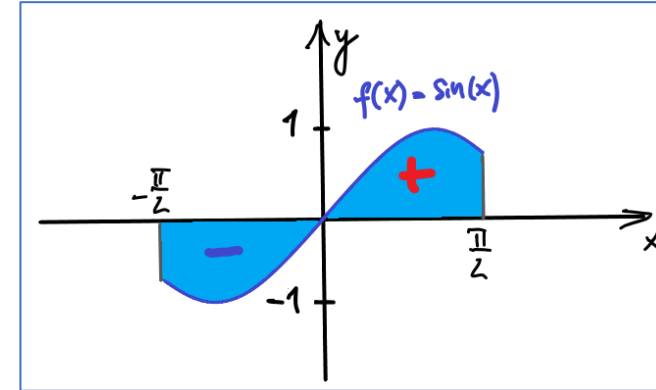
ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

$$\begin{aligned}
 4.) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= \\
 &= -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 - 0 = 0
 \end{aligned}$$



Mit der Nullstelle $x = 0$ erhalten wir als **nicht vorzeichenbehaftete** Fläche:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \, dx \right| + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right| + \left| -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| \\
 &= \left| -\cos(0) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \right| + \left| -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) \right| = |-1 - (-0)| + |-0 - (-1)| = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern