Übersicht

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10. Funktionen

10. Funktionen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

10.4 Ganzrationale Funktionen

Definition

Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

heißt **ganzrationale Funktion** oder auch **Polynomfunktion n -ten Grades**.

Ganzrationale Funktionen sind definiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie sind überall stetig.

Schnittpunkt mir der y-Achse: setze $x = 0$ $(\boldsymbol{f(0) = a_0})$

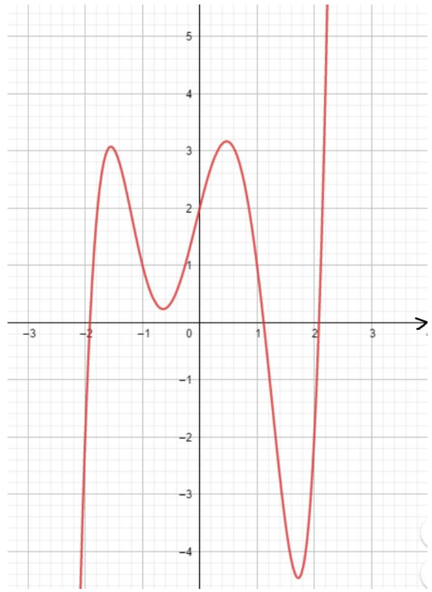
Schnittpunkte mit der x -Achse (Nullstellen): setze $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Faktorsatz: Wenn $f(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und a eine reelle Zahl mit $f(a) = 0$ ist, dann gibt es ein Polynom $g(x)$ vom Grad $n - 1$, so dass

$$f(x) = (x - a)g(x) \quad (\rightarrow \textit{Polynomdivision})$$

Jedes Polynom vom Grad n mit $n \geq 1$ hat **höchstens n Nullstellen**.

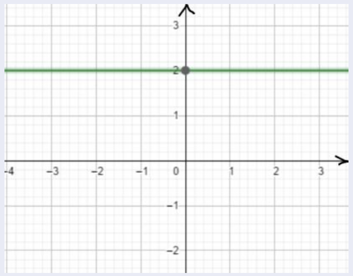
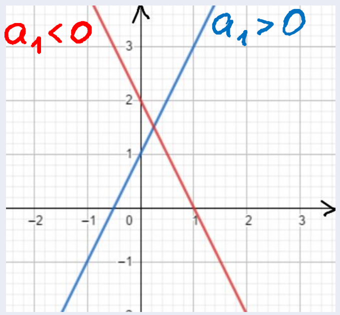
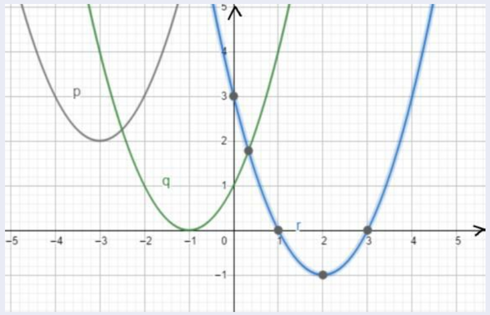
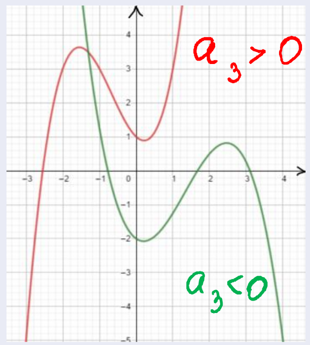
Jedes Polynom vom Grad n mit **n ungerade** hat **mindestens eine Nullstelle**.



$$f: y = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$$

10.4 Ganzrationale Funktionen

Beispiele für $n \leq 3$

Grad	0	1	2	3
Funktions-gleichung	$f_0(x) = a_0$; $a_0 \neq 0$ Konstante	$f_1(x) = a_0 + a_1x$; $a_1 \neq 0$ lineare Funktion, Gerade	$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$; $a_2 \neq 0$ quadratische Funktion, Parabel	$f_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$; $a_3 \neq 0$ kubische Parabel
typische Bilder				
Anzahl der Nullstellen	0	1	Höchstens 2	Höchstens 3, mindestens 1

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.4 Ganzrationale Funktionen

Aufgaben

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Geben Sie ein Beispiel von

1. einem Polynom fünften Grades mit 5 verschiedenen Nullstellen

   $(x-1)(x+2)(x-3)(x+3)(x-10) = f(x)$

2. einem Polynom fünften Grades mit 4 verschiedenen Nullstellen

   $(x-1)^2(x+2)(x-3)(x+3) = f(x)$

3. einem Polynom fünften Grades mit 3 verschiedenen Nullstellen

   $(x-1)^2(x+2)^2(x-3) = f(x)$

   $(x^2+1)(x-1)(x+2)(x-3) = f(x)$

4. einem Polynom fünften Grades mit 2 verschiedenen Nullstellen

   $(x-1)^2(x+2)^3 = f(x)$

5. einem Polynom fünften Grades mit genau einer Nullstelle

   $(x-1)^5 = f(x)$

   $(x^2+1)(x^2+2)(x-1) = f(x)$

6. einem Polynom sechsten Grades ohne Nullstellen

   $x^6+1 = f(x)$

   $(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3) = f(x)$

   $(x^2+1)^3 = f(x)$

10. Funktionen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Definition

Unter einer **gebrochenrationalen Funktion** $f\ (x)$ versteht man den Quotienten aus zwei Polynomen $g\ (x)$ und $h\ (x)$

$$f\ (x)\ = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$g(x)$ – Zählerpolynom vom Grad n

$h(x)$ – Nennerpolynom vom Grad m

Definitionsbereich:	alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms $h\ (x) = 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$
Nullstellen:	Nullstellen des Zählerpolynoms, aber nicht vom Nenner: $g(x) = 0$
Definitionslücken:	Nullstellen des Nennerpolynoms $h\ (x) = 0$
Polstellen:	(= Unendlichkeitsstelle) Nullstellen vom Nenner-, aber nicht vom Zählerpolynom: $x = x_0$ ist senkrechte Asymptote der Kurve Asymptote – eine Gerade, deren sich die Funktion im Unendlichen beliebig nähert (fast berührt); „Tangente im Unendlichen“
stetig behebbare Definitionslücken	gleichzeitig Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

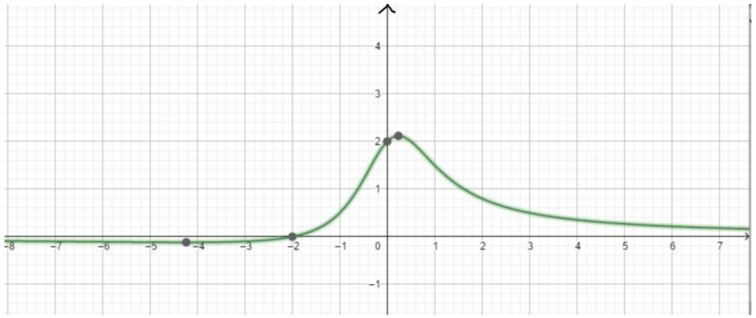
10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

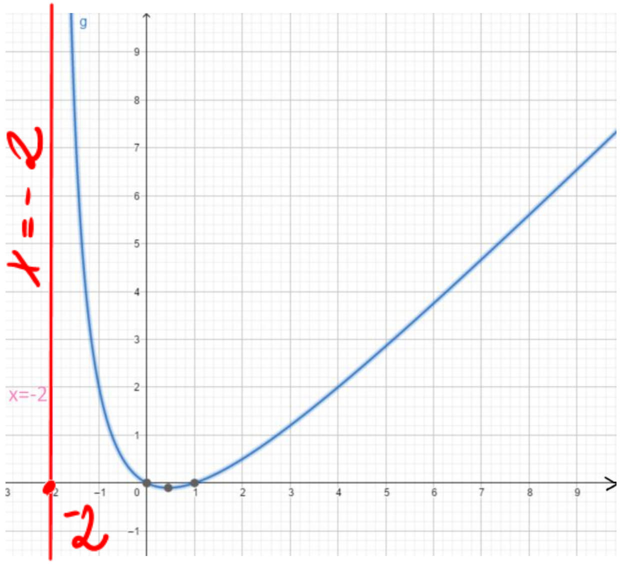
Beispiele

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$

keine Definitionslücken;

eine Nullstelle: $x = -2$





b) $f(x) = \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x(x-1)}{x+2}$

Definitionslücke: $x = -2$ (Polstelle);

Nullstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Sonderfälle und Bezeichnungen

Unter einer **gebrochenrationalen Funktion** $f\,(x)$ versteht man den Quotienten aus zwei Polynomen $g\,(x)$ und $h\,(x)$

$$f\,(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} \ldots + b_1 x + b_0}$$

$g(x)$ – Zählerpolynom vom Grad n

$h(x)$ – Nennerpolynom vom Grad m

1 $m = 0$: Nenner $h(x) = b_0 = const$; $f\,(x)$ ist eine ganzrationale Funktion

2 $n \geq m$: Zählergrad $\geq$ Nennergrad, unecht gebrochen rationale Funktion

3 $n < m$: Zählergrad $<$ Nennergrad, echt gebrochen rationale Funktion

$$(x^3 + 0\cdot x^2 - 3x + 5) : (x-2) = x^2 + 2x + 1$$
$$-(x^3 - 2x^2)$$
$$2x^2 - 3x + 5$$
$$-(2x^2 - 4x)$$
$$x + 5$$
$$-(x - 2)$$
$$7$$

Jede unecht gebrochen rationale Funktion $(n \geq m)$ lässt sich darstellen als Summe einer ganzrationalen Funktion vom Grad $(n - m)$ und einer echt gebrochenrationalen Funktion (→Polynomdivision):

a) $\frac{x^3-3x+5}{x-2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{7}{x-2}$

b) $\frac{3x^2+4x+9}{x^2+5} = 3 + \frac{4x-6}{x^2+5}$

$\frac{1}{10000}$ $\frac{1}{\frac{1}{10}} = 1 \cdot 10$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 1: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (Polstellen)

$f(2{,}9) = \frac{2 \cdot 2{,}9 - 5}{0{,}1} = (2 \cdot 2{,}9 - 5) \cdot 10$

Beispiel 1: $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$; $x_0 = 3$ einfache Nenner-Nullstelle

$f(x) \to +\infty$ für $x \to 3+$ (von rechts) 3,1

$f(x) \to -\infty$ für $x \to 3-$ (von links) 2,9

Beim Überschreiten der Stelle $x_0 = 3$ ändert sich das Vorzeichen der Funktionswerte

→ $f(x)$ besitzt bei $x_0 = 3$ einen **Pol mit Zeichenwechsel** (punktsymmetrisch).

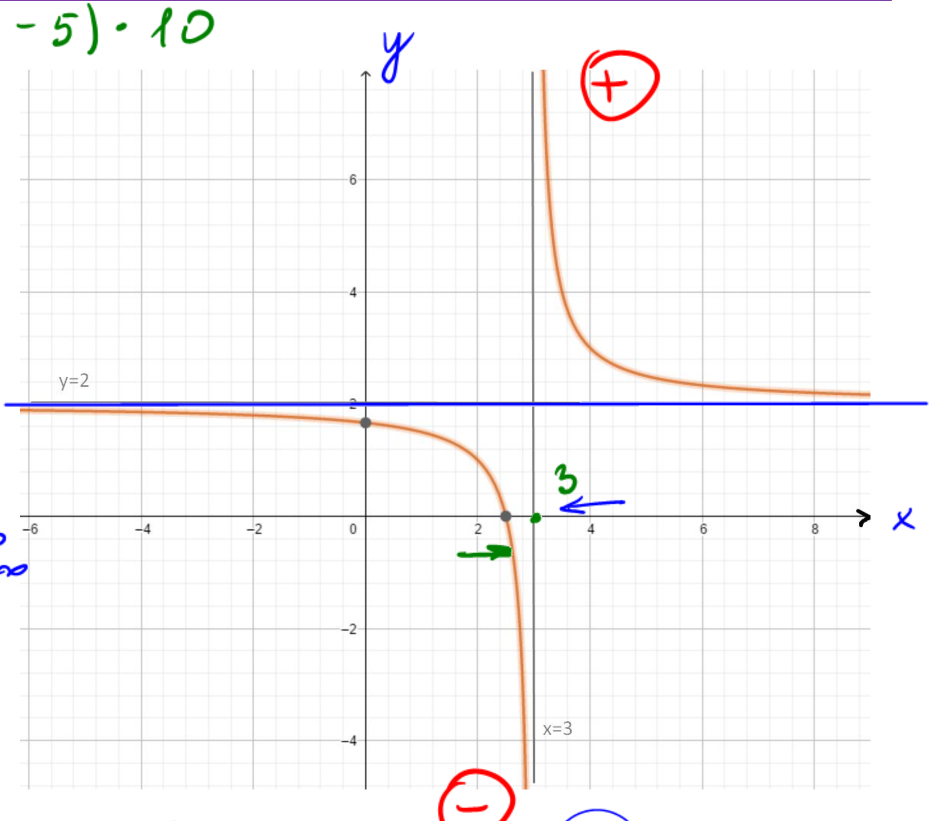
Die Kurve nähert sich immer mehr der Geraden $x = 3$: die **Gerade $x = 3$** ist **senkrechte Asymptote**.

$x \to \infty$ $-x \to \infty$ $x \to -\infty$

Für die Skizze benötigt man noch das Verhalten für $|x| \to \infty$: Rest

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3} \to 2 \;\text{ für }\; x \to \pm\infty$$

Für große Werte von $|x|$ unterscheidet sich $f(x)$ immer weniger von 2: $y = 2$ ist **waagrechter Asymptote** der Kurve. Die Annäherung erfolgt nach rechts von oben und nach links von unten, wegen $\frac{1}{x-3} > 0$ für $x > 3$ und $\frac{1}{x-3} < 0$ für $x < 3$



$y = 2$

$(2x-5) : (x-3) = 2$
$-(2x-6)$
1

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 1: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (Polstellen)

$-1{,}1$ $\quad -0{,}9$

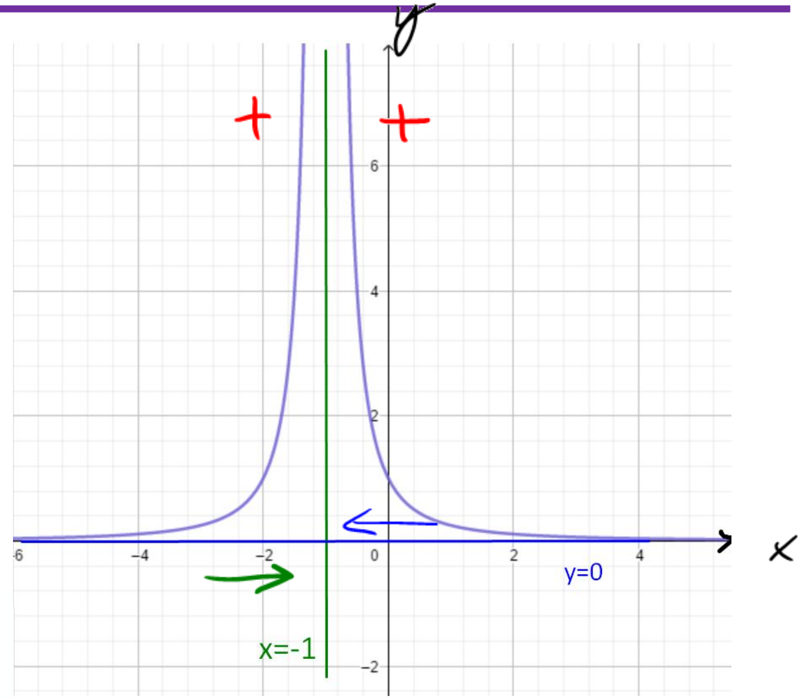
Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; $\boldsymbol{x = -1}$ doppelte Nenner−Nullstelle

$f(x) \to +\infty$ für $x \to -1^{\pm}$ (Unabhängig davon, ob Annäherung von rechts oder von links)

Beim Überschreiten der Stelle $x_0 = -1$ tritt keine Änderung des Vorzeichens auf: $f(x)$ hat bei $x_0 = -1$ ein **Pol ohne Zeichenwechsel** (achsensymmetrisch).

→ Die Kurve besitzt die **senkrechte Asymptote $x = -1$**

→ $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty \Rightarrow \boldsymbol{y = 0}$ ist **waagrechte Asymptote**



$|x| \to \infty$

$x \to \infty \qquad x \to -\infty$

$x = 10\,000 \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(10\,000)^2} \approx 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\frac{1}{0{,}00001} = 100000$

Grenzwerte:

$\frac{1}{\infty} = 0$

$\frac{1}{0} = \infty$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 1: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (Polstellen)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

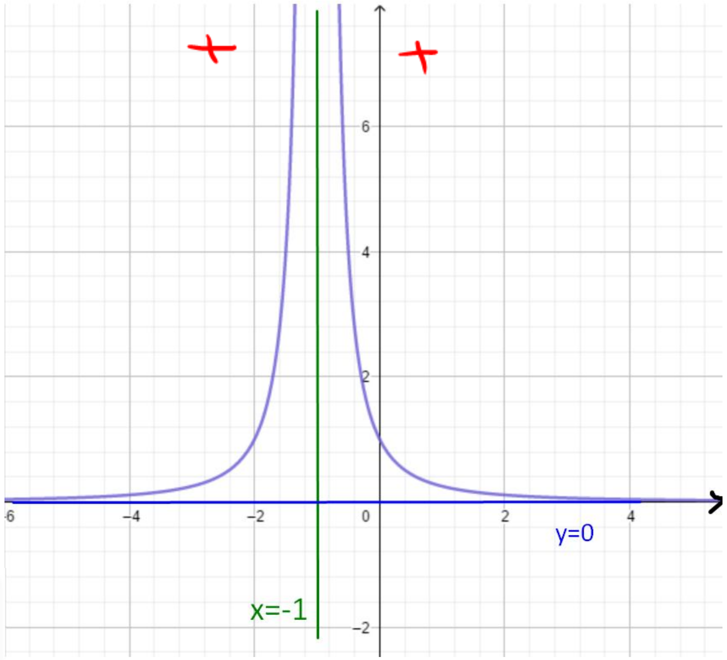
Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$: $\mathbf{x = -1}$ doppelte Nenner–Nullstelle

$f(x) \to +\infty$ für $x \to -1^{\pm}$ (Unabhängig davon, ob Annäherung von rechts oder von links)

Beim Überschreiten der Stelle $x_0 = -1$ tritt keine Änderung des Vorzeichens auf: $f(x)$ hat bei $x_0 = -1$ ein **Pol ohne Zeichenwechsel** (achsensymmetrisch).

→ Die Kurve besitzt die **senkrechte Asymptote** $\mathbf{x = -1}$

→ $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty \Rightarrow \mathbf{y = 0}$ ist **waagrechte Asymptote**



Ist x_0 eine n-fache Nullstelle des Nennerpolynoms und keine Nullstelle des Zählerpolynoms, so besitzt $f(x)$ bei x_0 eine Unendlichkeitsstelle oder einen Pol;
$x = x_0$ ist **senkrechte Asymptote der Kurve**
n gerade $\Leftrightarrow$ Pol ohne Zeichenwechsel
n ungerade $\Leftrightarrow$ Pol mit Zeichenwechsel

$\frac{1}{(x+1)^3}$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

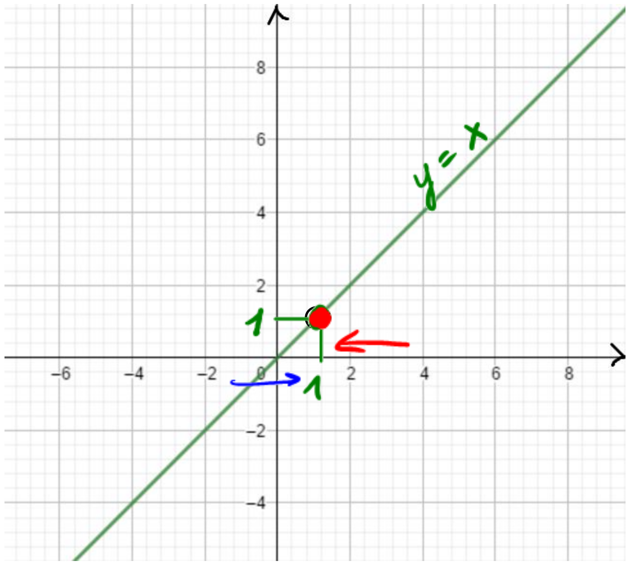
Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)

Beispiel 3: $f_1(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ definiert für alle reellen $x \neq 1$

$x_0 = 1$ ist Nullstelle von Nenner und Zähler; für $\boxed{x \neq 1}$ kann man also den Faktor $(x-1)$ kürzen:

$$f_1(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x; \quad \boxed{x \neq 1}$$

Das Schaubild von $f_1(x)$ ist die Gerade $y = x$ ohne den Punkt $(1|1)$.



Wenn wir uns an die Definitionslücke $x = 1$ beliebig nah von links und rechts nähern, nährt sich der Funktionswert dem Wert 1 (*d.h. linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert für $|x| \to 1$ stimmen überein, also existiert ein Grenzwert an dieser Stelle und wir können die Funktion „stetig fortsetzen“*). Nimmt man diesen Punkt hinzu, so erhält man die **stetige Fortsetzung** der Funktion $f_1(x)$:

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} x; & x \neq 1 \\ 1; & x = 1 \end{cases} = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{f} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \neq 1 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Wie nennt x_0 eine **stetig behebbare Definitionslücke** der Funktion $f_1(x)$.

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

$x=0$ $\boxed{x=1}$

Beispiel 4: $f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2}$;

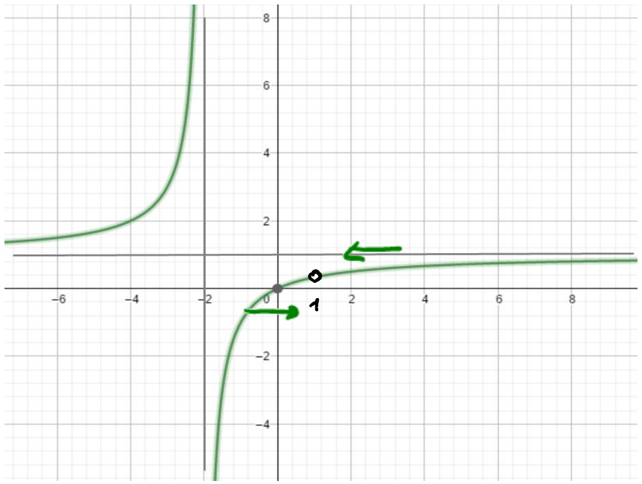
Nenner-Nullstellen: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -2$ und $\boxed{x_2 = 1} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$

Zähler-Nullstellen: $x_3 = 0$; $x_4 = 1$

$x_0 = 1$ ist Nullstelle von Nenner und Zähler; für $\boxed{x \neq 1}$ kann man also den Faktor $(x-1)$ kürzen:

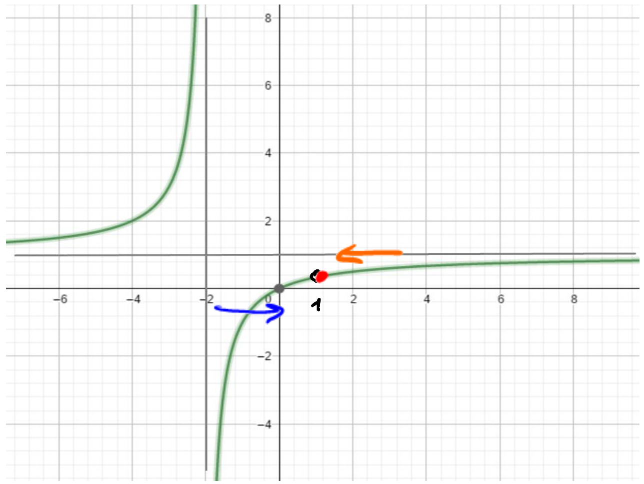
$$f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = \frac{x}{x+2}; \quad x \neq 1$$



Um das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke $x_0 = 1$ näher zu untersuchen, nähert man sich diesem Wert von beiden Seiten an:

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)



Beispiel 4: $f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2}$;

Nenner-Nullstellen: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$

Zähler-Nullstellen: $x_3 = 0$; $x_4 = 1$

$x_0 = 1$ ist Nullstelle von Nenner und Zähler; für $x \neq 1$ kann man also den Faktor $(x-1)$ kürzen:

$$f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \boxed{\frac{x}{x+2}};\quad x \neq 1$$

Um das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke $x_0 = 1$ näher zu untersuchen, nähert man sich diesem Wert von beiden Seiten an:

„von links an die 1"	„von rechts an die 1"
$f_2(0) = 0$	$f_2(2) = 0{,}5$
$f_2(0{,}5) = 0{,}2$	$f_2(1{,}5) \approx 0{,}42857$
$f_2(0{,}9) \approx 0{,}310345$	$f_2(1{,}1) \approx 0{,}35484$
$f_2(0{,}99) \approx 0{,}33110$	$f_2(1{,}01) \approx 0{,}3355548$
$f_2(0{,}999) \approx 0{,}333111$	$f_2(1{,}001) \approx 0{,}3335554$

„linksseitiger Gr." „rechtsseitiger Grenzwert"

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 0{,}\overline{3} = \boxed{\frac{1}{3} = \lim_{x\to 1} f(x)}$$

$x \nearrow 1$ $\quad$ $x \searrow 1$

$$\tilde{f} = \begin{cases} \frac{x}{x+2}, & \text{falls } x \neq 1 \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

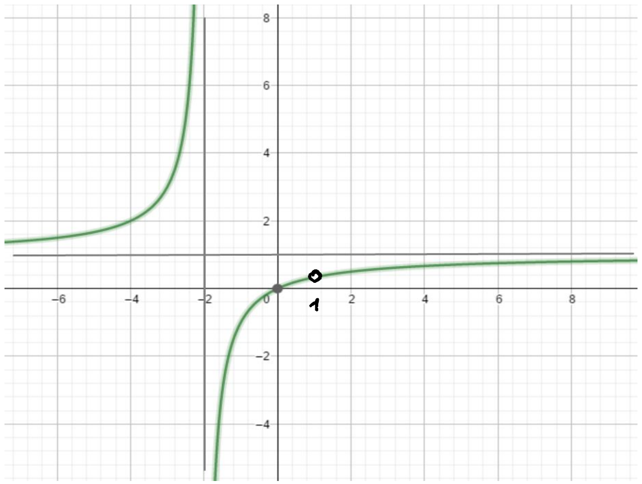
Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)

Beispiel 4: $f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2}$;

Nenner-Nullstellen: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

Zähler-Nullstellen: $x_3 = 0$; $x_4 = 1$



$x_0 = 1$ ist Nullstelle von Nenner und Zähler; für $x \neq 1$ kann man also den Faktor $(x-1)$ kürzen:

$$f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}; \quad x \neq 1$$

Um das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke $x_0 = 1$ näher zu untersuchen, nähert man sich diesem Wert von beiden Seiten an:

„von links an die 1“	„von rechts an die 1“
$f_2(0) = 0$	$f_2(2) = 0{,}5$
$f_2(0{,}5) = 0{,}2$	$f_2(1{,}5) \approx 0{,}42857$
$f_2(0{,}9) \approx 0{,}310345$	$f_2(1{,}1) \approx 0{,}35484$
$f_2(0{,}99) \approx 0{,}33110$	$f_2(1{,}01) \approx 0{,}3355548$
$f_2(0{,}999) \approx 0{,}333111$	$f_2(1{,}001) \approx 0{,}3335554$

→ *Die Funktion nähert sich in $x_0 = 1$ dem Funktionswert $\frac{1}{3}$.*

*Man sagt „die Funktion **strebt** für $x = 1$ **gegen** $\frac{1}{3}$.*

→ *Hierbei handelt es sich um eine Grenzwertbetrachtung. Man schreibt:*

$$\lim_{x\to 1-} f_2(x) = \lim_{x\to 1+} f_2(x) = \lim_{x\to 1} f_2(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x+2}\right) = \left|\frac{1}{1+2}\right| = \frac{1}{3}$$

(Sprich: “Linksseitiger Grenzwert gleich rechtsseitiger Grenzwert gleich Grenzwert (Limes) von $f(x)$ für x gegen 1“).

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \rightarrow$ doppelte Def. lücke $x = 1$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

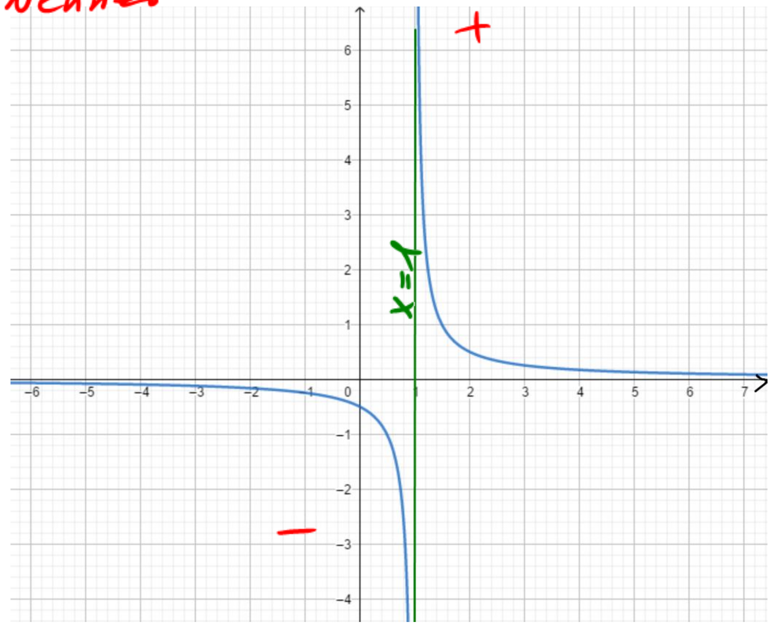
Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)

$x = 1$ Nullstelle vom Zähler und Nenner

Beispiel 5: $f_3(x) = \frac{x-1}{2x^2-4x+2}$ definiert für alle reellen $\boxed{x \neq 1}$

$$f_3(x) = \frac{x-1}{2(x^2-2x+1)} = \frac{\cancel{x-1}}{2(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2(x-1)}, \quad x \neq 1$$

Die **Definitionslücke $x_0 = 1$** ist auch durch Kürzen **nicht zu beheben**. In der gekürzten Form ist x_0 immer noch Nullstelle des Nenners, aber nicht mehr Nullstelle des Zählers:
$f_3(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ einen **Pol mit Zeichenwechsel**.



Ist x_0 **Nullstelle des Nennerpolynoms und des Zählerpolynoms** einer gebrochenrationalen Funktion $f(x)$, so sind zwei Fälle möglich:

a) $f(x)$ kann (durch Kürzen) bei x_0 **stetig ergänzt werden**;

b) $f(x)$ besitzt bei x_0 **einen Pol**.

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Verhalten für $|x| \to \infty$ $(x \to \pm\infty)$

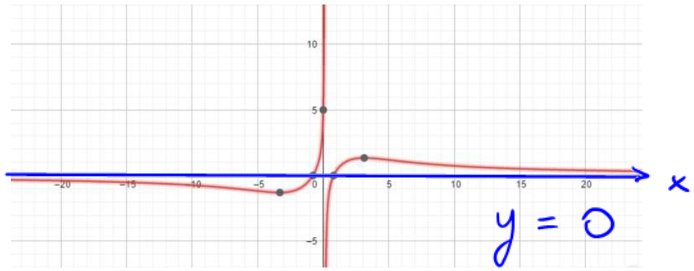
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Sei $f\,(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$



1. Fall $n < m$:

→ x-Achse ist die waagerechte Asymptote.

→ Der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ ist dann gleich Null: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$

Beispiel: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{8x^2-5}{x^3+8x-1} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{8}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \left|\frac{0}{1}\right| = 0$

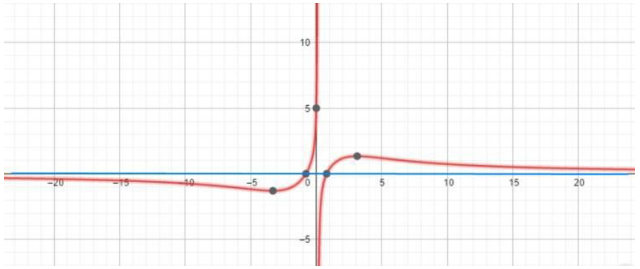
$$\frac{8x^2-5}{x^3+8x-1} = \frac{\cancel{x^3}\left(\cancel{\frac{8}{x}}^{0} - \cancel{\frac{5}{x^3}}^{0}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\cancel{\frac{8}{x^2}}^{0} - \cancel{\frac{1}{x^3}}^{0}\right)} \xrightarrow{x \to \pm\infty} \left|\frac{0}{1}\right| = 0$$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Verhalten für $|x| \to \infty$ ($x \to \pm\infty$)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$



1. Fall $n < m$:

→ x-Achse ist die waagerechte Asymptote.

→ Der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ ist dann gleich Null: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$

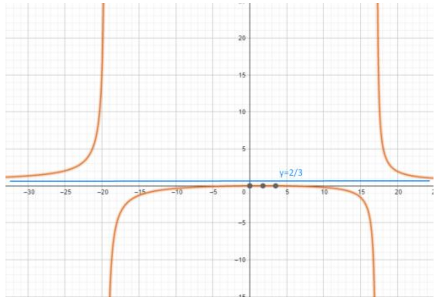
Beispiel: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{8x^2-5}{x^3+8x-1} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{8}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \left|\frac{0}{1}\right| = 0$

2. Fall $n = m$:

→ die Gerade $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist die waagerechte Asymptote

→ $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = const$

Beispiel: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-7x}{7x+3x^2-1000} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{7}{x}-\frac{1000}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}$



$$\frac{2x^2-7x}{3x^2+7x-1000} = \frac{\cancel{x^2}\left(2-\cancel{\frac{7}{x}}^{\,0}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\cancel{\frac{7}{x}}^{\,0}-\cancel{\frac{1000}{x^2}}^{\,0}\right)} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{2}{3}$$

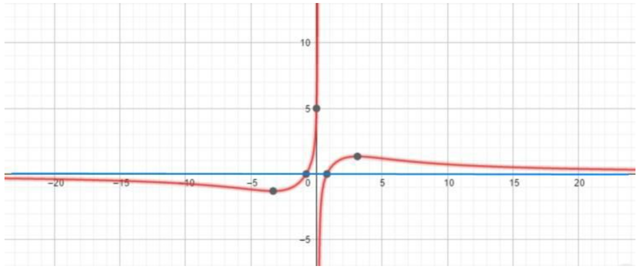
10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Verhalten für $|x| \to \infty$ ($x \to \pm\infty$)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$

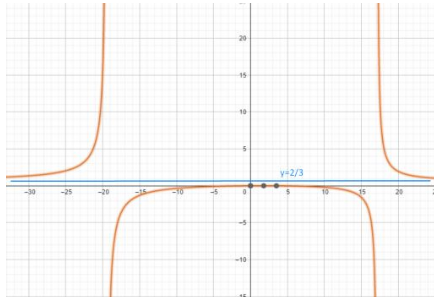


1. Fall $n < m$:

→ x-Achse ist die waagerechte Asymptote.

→ Der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ ist dann gleich Null: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$

Beispiel: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{8x^2-5}{x^3+8x-1} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{8}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \left|\frac{0}{1}\right| = 0$



2. Fall $n = m$:

→ die Gerade $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist die waagerechte Asymptote

→ $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = const$

Beispiel: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-7x}{7x+3x^2-1000} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{7}{x}-\frac{1000}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}$

3. Fall $n > m$:

→ mit Polynomdivision zu einer echt gebrochenrationalen Funktion umformen; für unendlich große x geht der Bruch im Rest zu Null

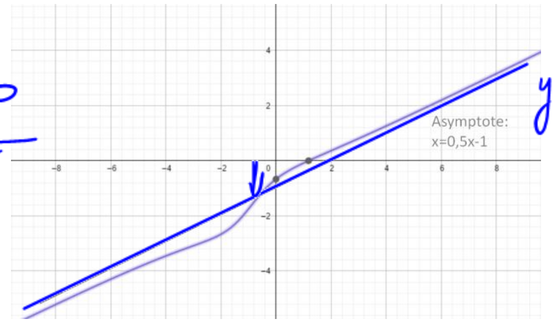
→ der „ganze" Term ergibt die Gleichung der Asymptote an

→ $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \pm\infty$ *(das Vorzeichen hängt vom Vorzeichen von a_n und davon ab, ob n gerade oder ungerade ist)*

Fall 1: 0

Beispiel: $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3+x-2}{x^2+2x+3} = \boxed{\frac{1}{2}x - 1} + \boxed{\cancel{\frac{\frac{3}{2}x+1}{x^2+2x+3}}} \Rightarrow \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \pm\infty$

$-\infty$ ←



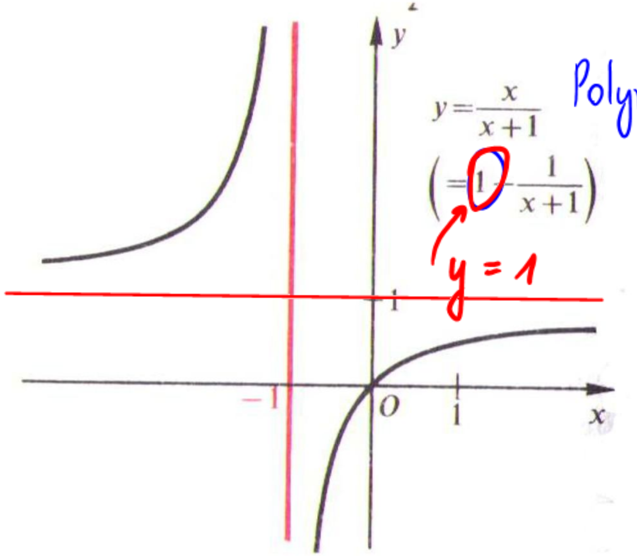
$y = \frac{1}{2}x - 1$

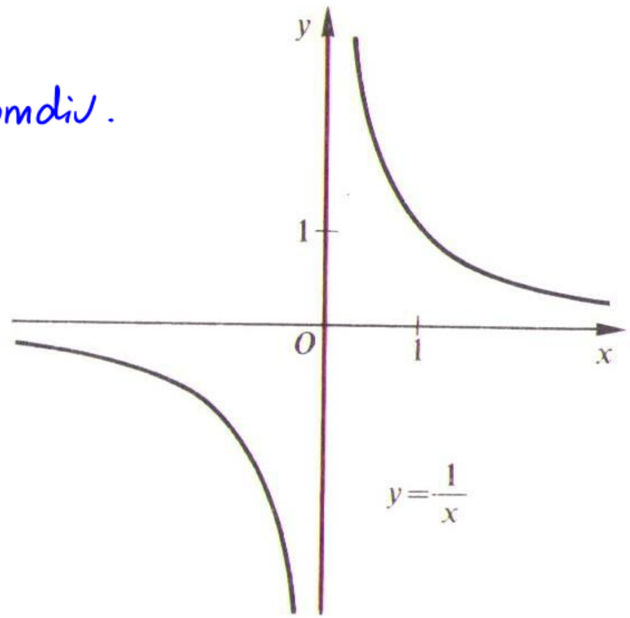
Asymptote

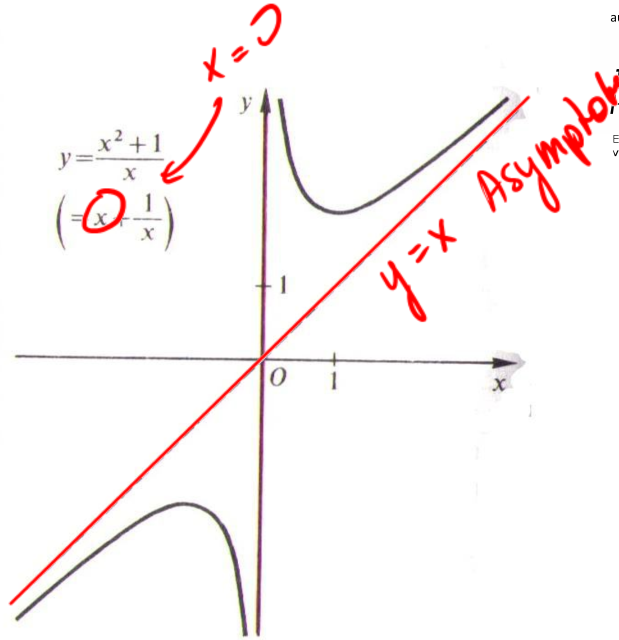
$\to +\infty$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele

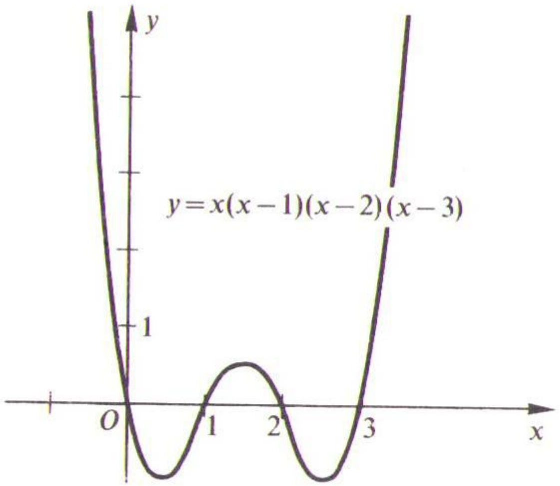


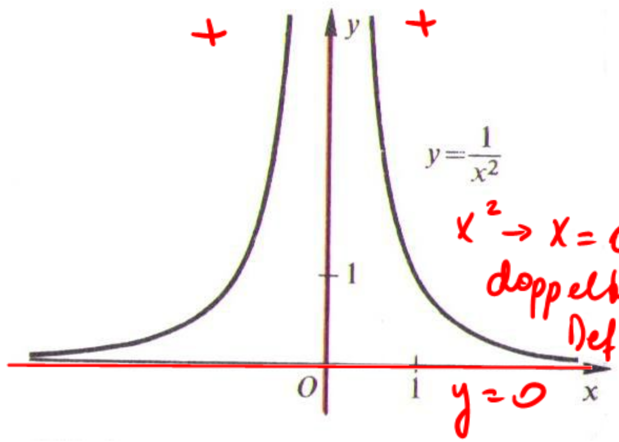




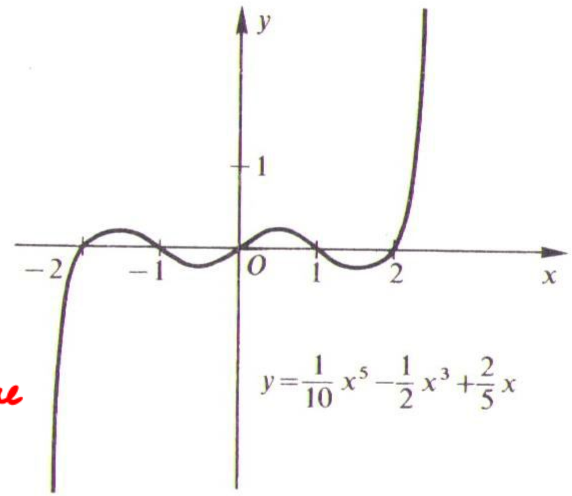
10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele





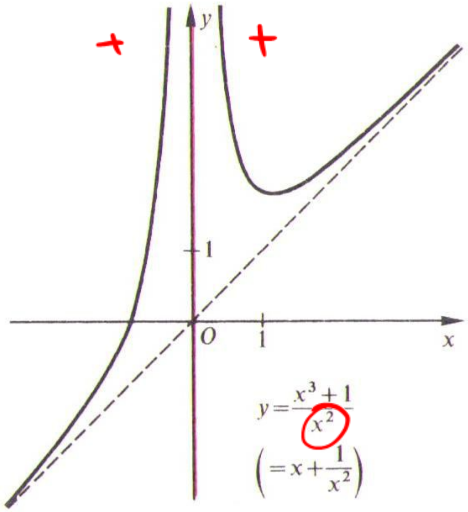
$x^2 \to x=0$ doppelte Def. Lücke

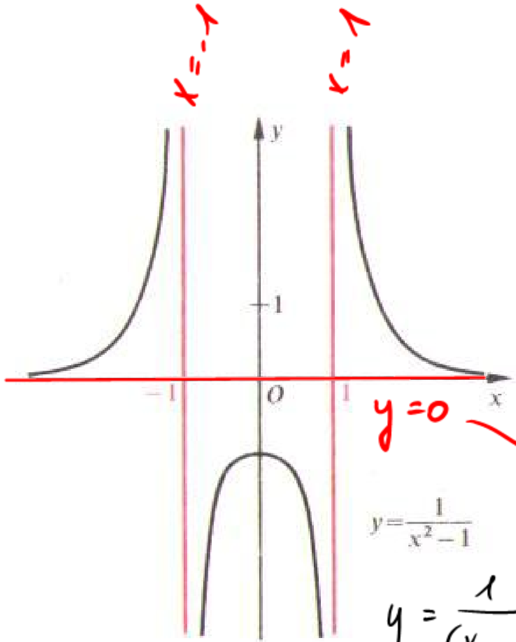


für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

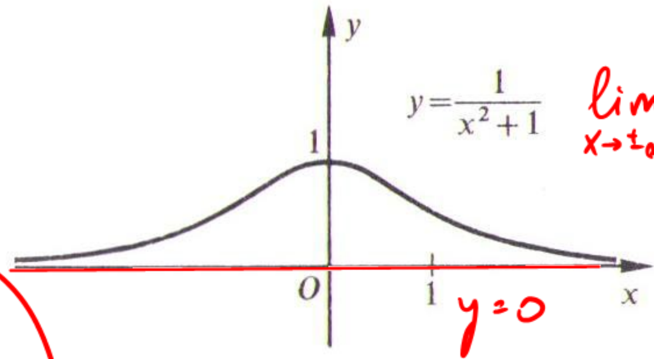
Beispiele





$$y=\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$$

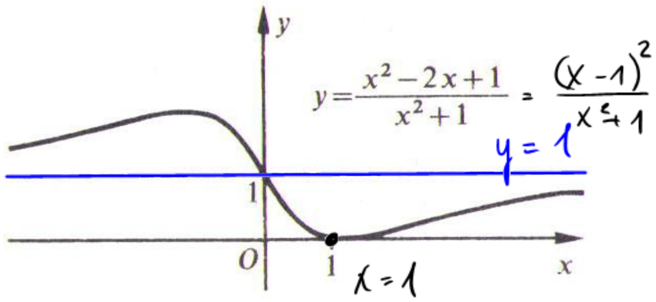


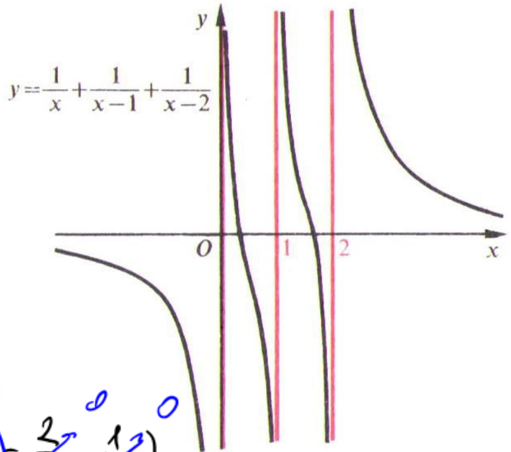
$$y=\frac{1}{x^2+1}$$

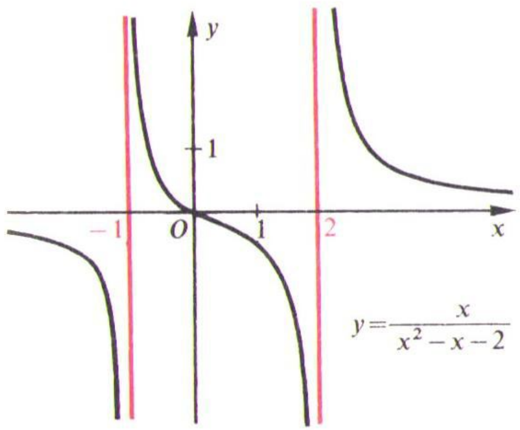
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

10.4 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele







$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\cancel{\frac{2}{x}}^{\,0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}\right)} = \underline{\underline{1}}$$