Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

5. Quadratische Gleichungen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.1 Reinquadratische Gleichungen

$ax^2 + c = 0\,, a \neq 0$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Die reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ lässt sich durch äquivalente Umformungen in folgende Form bringen:

$$ax^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a}$$

1. $-\frac{c}{a} > 0$: zwei Lösungen $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$;
2. $-\frac{c}{a} < 0$: nicht lösbar in $\mathbb{R}$; $L = \{\,\}$;
3. $c = 0$: einzige Lösung $x = 0$

Beispiele:

a) $4x^2 - 121 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 121 \Leftrightarrow x^2 = \frac{121}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{121}{4}} = \pm\frac{11}{2}$$

b) $\sqrt{2}x^2 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{2}}$$

c) $x^2 + 64 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = -64 \Rightarrow \text{keine reelle Lösung}$$

5.2 Spezielle quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx = 0\,,\ \ a, b \neq 0$

Die Lösungen der speziellen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx = 0$ ergeben sich durch **Ausklammern**:

$$x\,(ax + b) = 0$$

Nach „Produkt-Null-Satz“ ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$) ergibt sich, dass entweder $x = 0$ oder $ax + b = 0$.

Die Lösungen sind deshalb $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Beispiel: $x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x - 3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

$L = \{0, 3\}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ \ a, b, c \neq 0$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung"

Manchmal ist es erforderlich einen Ausdruck in die Form eines Binoms zu bringen (z.B. quadratische Form einer verschobenen Parabel).

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dies geschieht mit Hilfe des 2. Binoms, indem es „rückwärts" angewendet wird.

Durch quadratische Ergänzung wird der Term $ax^2 + bx + c = 0$ als **Summe** eines mit einem **Faktor** versehenen **Quadrats** und einem **konstanten Anteil** dargestellt:

i. **Normalform: $x^2 + dx + c$**, für $a = 1$

$$x^2 + dx + c = \underline{x^2 + dx + \frac{d^2}{4}} \overbrace{-\frac{d^2}{4}}^{\text{Nulladdition}} + c = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{d^2}{4}\right)$$

Beispiele:

$$x^2 + 2x + 3 = \left(x^2 + 2x + \frac{2^2}{4}\right) + \left(3 - \frac{2^2}{4}\right) = \left(x^2 + 2x + 1\right) + 2 = (x+1)^2 + 2$$

$$x^2 - 4x + 7 = \left(x^2 - 4x + \frac{(-4)^2}{4}\right) + \left(7 - \frac{(-4)^2}{4}\right) = \left(x^2 - 4x + 4\right) + (7-4) = (x-2)^2 + 3 = 0 \iff (x-2)^2 = -3 \quad ⚡$$

Weiter: die Nullstellen direkt berechnen wie in der reinquadratischen Gleichung!

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,, \;\; a, b, c \neq 0$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

ii. Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Wir prüfen mit der binomischen Formel nach:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Beispiel: Wir formen den Term
$-3x^2 + x - 5$
durch quadratische Ergänzung um und berechnen die Nullstellen:

$$\begin{aligned} -3x^2 + x - 5 &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) - 5 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6^2}\right) - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{6^2} - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{59}{12}. \end{aligned}$$

$-3x^2 + x - 5 = -3\left(x + \frac{1}{-6}\right)^2 \underbrace{- 5 - \frac{1}{-12}}$

$-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - 5 + \frac{1}{12}$

$-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{59}{12} = 0$

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung"

ii. Allgemeine Form: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Aufgabe: Formen Sie folgenden Term mit quadratischer Ergänzung um:

$$-\frac{5}{2}x^2 + x - 9$$

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ \ a, b, c \neq 0$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

2. Lösungsmethode „Mitternachtsformel“ oder „abc-Form“

Allgemeine Form: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad \textbf{mit Diskriminante } D = b^2 - 4ac$$

Die Anzahl der Lösungen hängt von D ab:

i. Für $D > 0$ gibt es zwei Lösungen;

ii. Für $D = 0$ gibt es eine Lösung;

iii. Für $D < 0$ gibt es keine Lösungen: $L = \{\,\}$

Beispiel: $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 9 - 4 = 5 > 0$ → es gibt zwei Lösungen

$\Rightarrow x_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 - \sqrt{5} \ \wedge\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 + \sqrt{5}$

$$L = \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$$

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

3. Lösungsmethode „pq-Formel“ (Sonderfall von „abc-Form“)

Nur für Normalform $x^2 + px + q$ mit $a = 1$ gültig:

Beispiel: Wir lösen die folgende Gleichung mit *quadratischer Ergänzung* und direkt mit der pq-Formel:

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

a. Quadratische Ergänzung ergibt:
$x^2 - 6x + 9 - 9 + 4 = 0$
bzw. $(x-3)^2 = 5$ $\mid \sqrt{\ }$ $\Rightarrow |x-3| = \sqrt{5}$

$x - 3 = \sqrt{5}$ $-(x-3) = \sqrt{5}$

b. Mit $p = -6$ und $q = 4$ bekommen wir:

b) $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-4}$ $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{5}$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 3 \pm \sqrt{5}\,.$$

$= 3 \pm \sqrt{5}$

pq-Formel: Wenn die Diskriminante d nichtnegativ ist:

$$d = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zwei reelle Lösungen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Falls $d = 0$ ist, fallen die Lösungen zu einer einzigen zusammen.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\;\; a, b, c \neq 0$

4. Lösungsmethode „Satz von Vieta" (1540-1603)

Nur für Normalform $x^2 + {\color{red}p}x + {\color{blue}q}$ mit $a = 1$ gültig:

Satz von Vieta Sei $(\frac{p}{4})^2 - q \geq 0$, dann besitzt die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zwei Nullstellen x_1 und x_2. Es gilt

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

und

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Beispiel 1: Gesucht ist die Normalform der quadratischen Gleichung, welche die folgenden Lösungen besitzt :

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{2}\,.$

<u>Lösung</u>: Nach Satz von Vieta gilt

$${\color{red}p} = -(x_1 + x_2) = -\left(1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}\right) = {\color{red}-2}$$

$${\color{blue}q} = x_1 \cdot x_2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) = 1 - 2 = {\color{blue}-1}$$

$\Rightarrow$ Normalform lautet: $x^2 {\color{red}- 2}x {\color{blue}- 1} = 0$

Beispiel 2:

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 35$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 5$$

$$\Rightarrow L = \{5, 7\}$$

Beispiel 3:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 1$$

$$\Rightarrow L = \{-2, 1\}$$

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

5. Sonderfälle

Beispiel

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_2 = -1, \quad x_3 = -3$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 0\}$$

Beispiel:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \qquad \textit{Substitution}: \quad z = x^2$$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$z_1 = \frac{10 + 8}{2} = 9 \qquad x^2 = z_1 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$$

$$z_2 = \frac{10 - 8}{2} = 1 \qquad x^2 = z_2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 1, 3\}$$

Übersicht

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

6. Wurzelgleichungen

Allgemeine Gleichungen

Neben den bisher beschriebenen (Standard-)Formen können Gleichungen natürlich auch jede andere mathematische Form haben.

Beispiele:

$$\ln x - \ln x^2 = 5,$$

$$\sqrt{x+3} = 2 + 5x$$

$$\sin x = \frac{x}{2}$$

Indem man die linke Seite einer Gleichung auf die rechte Seite bringt, erhält man folgende Aussage:

Die allgemeinste Form einer Gleichung ist $f(x) = 0$
Dies bedeutet:
Das Lösen einer Gleichung entspricht der Suche nach den Nullstellen einer Funktion.

Definition und Lösungsweg

Gleichungen mit Wurzel, in **deren Radikanden die Unbekannte $\boldsymbol{x}$** vorkommt, heißen Wurzelgleichungen.

Falls nur eine Wurzel der Form $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ auftritt und außerhalb der Wurzel die Unbekannte x nur linear vorkommt, bietet sich folgender Lösungsweg an:

1. Man bringe die Wurzel auf eine Seite.
2. Man quadriere beide Seiten der umgeformten Gleichung.

   ! Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, da durch das Quadrieren kommt eine Lösung dazu.
3. Man Löse die entstehende Gleichung.
4. Man überprüfe, welche der Lösungen die Ausgangsgleichung tatsächlich erfüllt → Probe!

Beispiele

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

1.

$$
\begin{aligned}
& 14-\sqrt{x^2+x-14}=2x \\
\Leftrightarrow\quad & 14-2x=\sqrt{x^2+x-14}\,|\,()^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (14-2x)^2=x^2+x-14 \\
\Leftrightarrow\quad & 196-56x+4x^2=x^2+x-14 \\
\Leftrightarrow\quad & 3x^2-57x+210=0\,|:3 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-19x+70=0 \\
\Rightarrow\quad & x_{1,2}=\frac{19}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}-70}=\frac{19}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{19}{2}\pm\frac{9}{2} \\
& x_1=5,\ x_2=14
\end{aligned}
$$

Probe :

$$
\begin{aligned}
& 14-\sqrt{14^2+14-14}\stackrel{?}{=}2\cdot 14 \\
& 14-14\neq 28
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 14-\sqrt{5^2+5-14}\stackrel{?}{=}2\cdot 5 \\
& 14-4=10
\end{aligned}
$$

Das heißt, $x_1=5$ *erfüllt die Gleichung, wohingegen* $x_2=14$ *nicht als Lösung in Frage kommt.*

Beispiele

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

2.

$$1 - x = \sqrt{5x - 11} \mid ()^2$$
$$(1-x)^2 = 5x - 11$$
$$1 - 2x + x^2 = 5x - 11$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = 4$$

Probe :

$$1 - 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 3 - 11}$$
$$-2 \neq 2$$

$$1 - 4 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 4 - 11}$$
$$-3 \neq 3$$

Weder $x_1 = 3$ *noch* $x_2 = 4$ *erfüllen die Gleichung.*

Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

7. Gleichungen n-ten Grades

Polynome

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Eine **Gleichung n-ten Grades** oder **Polynom vom Grad n** ist eine Summe von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten. Allgemein schreibt man:

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

Die Parameter a_k werden dabei als **Koeffizienten** bezeichnet.

Beispiele:

1. Polynom 4. Grades:

$$P(x) = 3\,x^4 - 2\,x^2 + x\,,$$

2. Polynom 3. Grades:

$$P(x) = 3\,x^3 - 2\,x - 1$$

3. Polynom 1. Grades (Gerade):

$$P(x) = -3\,x + 2$$

Polynome

Polynome können wir addieren:

Durch die Addition von Polynomen entsteht wieder ein Polynom. Addieren wir die Polynome

$$P(x) = 3\,x^3 - 2\,x - 1 \quad \text{und} \quad Q(x) = -4\,x^4 + 2\,x^3 - 3\,x + 2\,,$$

so entsteht das Polynom

$$P(x) + Q(x) = 3\,x^3 - 2\,x + 1 - 4\,x^4 + 2\,x^3 - 3\,x + 2 = -4\,x^4 + 5\,x^3 - 5\,x + 1\,.$$

Polynome können wir dividieren.
Wie bei den **ganzen Zahlen** kann eine **Division aufgehen** oder es kann ein **Rest** bleiben.
Ähnliches gilt nun für Polynome. Offensichtlich enthält das Polynom:

$$P(x) = x^2 + 2\,x + 1 = (x+1)^2$$

das Polynom $Q(x) = x + 1$ als Teiler:

$$\frac{x^2 + 2\,x + 1}{x+1} = x + 1\,.$$

Nullstellen

Die Lösungen der Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ stellen die Nullstellen des Polynoms $f(x)$ dar. Für Polynome vom Grad $n \geq 3$ sind die Nullstellen häufig nicht mit elementaren Rechenmethoden lösbar. In diesem Fall werden die Lösungen numerisch bestimmt/angenähert.

Das Hornerschema

Polynomdivision

Polynomdivision

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad n, $Q(x)$ ein Polynom vom Grad m und $n \geq m \geq 1$. Dann gibt es genau ein Polynom $F(x)$ (Quotient) vom Grad $n-m$ und genau ein Polynom $R(x)$ (Rest) mit einem Grad kleiner als m, so dass gilt:

$$P(x) = F(x)\,Q(x) + R(x)$$

Wir können die Polynomdivision mit Rest durchführen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,.$$

Betrachten wir zum Vergleich den Algorithmus zur Division von natürlichen Zahlen mit Rest:

$$\begin{array}{rlll} 7295 & : & 13 & = 561 + 2 : 13 \\ -65 & & & \\ 795 & & & \\ -78 & & & \\ 15 & & & \\ -13 & & & \\ 2 & & & \end{array}$$

Dividend	Divisor	Quotient	Rest
15	: 5	= 3	0
7295	: 13	= 561	$\frac{2}{13}$

Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$\begin{aligned} 7295 &= 13 \cdot 500 + 795\,, \\ 795 &= 13 \cdot 60 + 15\,, \\ 15 &= 13 \cdot 1 + 2\,. \end{aligned}$$

Grundidee: Bei jedem Schritt wird die **Stellenzahl** des Restes **um eins erniedrigt**, bis der Rest kleiner als der Divisor ist. Analog dazu geht man bei Polynomen vor und erniedrigt den Grad des Restpolynoms solange um eins, bis der Rest einen kleineren Grad als der Divisor hat.

Polynomdivision

Wir führen folgende Polynomdivision algorithmisch durch:

$$
\begin{array}{llll}
(x^4 & & +3x & -2) \\
-(x^4 & +2x^2) & & \\
\hline
 & \boxed{-2x^2} & \boxed{+3x} & \boxed{-2} \\
 & -(-2x^2 & & -4) \\
\hline
 & & 3x & +2
\end{array}
\quad : \quad (\boxed{x^2} + 2) = x^2 - 2 + \frac{3x+2}{x^2+2}
$$

$$\frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 3x - 2 &= x^2\,(x^2+2) \boxed{-\,2x^2 + 3x - 2}\,, \\
\boxed{-2x^2 + 3x - 2} &= -2\,(x^2+2) + 3x + 2\,.
\end{aligned}
$$

- Dividend und Divisor nach den Potenzen in der Reihe nach „sortieren“.
- Wenn eine Potenz fehlt, schreiben Sie die fehlende Potenz als Null auf.
- Bei Polynomdivision wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.
- Division abbrechen, wenn der Rest um ein Grad kleiner als Divisor ist.

Polynomdivision

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Beispiel:

$$(3x^5+2x^4-x^3+0x^2+x+1):(x^2+1)=3x^3+2x^2-4x-2$$

$$
\begin{array}{l}
-\left(3x^5 \qquad\quad +3x^3\right) \\
\hline
2x^4-4x^3+0x^2+x+1 \\
-\left(2x^4 \qquad\quad +2x^2\right) \\
\hline
-4x^3+2x^2+x+1 \\
-\left(-4x^3 \qquad\quad -4x\right) \\
\hline
-2x^2+5x+1 \\
-\left(-2x^2 \qquad\quad -2\right) \\
\hline
5x+3
\end{array}
$$

$$\frac{2x^4}{x^2}=2x^2$$

$$\frac{-4x^3}{x^2}=-4x$$

$$\frac{-2x^2}{x^2}=-2$$

Polynomdivision

Beispiel:

$$\left(3x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1\right) : \left(x^2 + 1\right) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 2 + \frac{5x+3}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
3x^5 & +2x^4 & -x^3 & & +x & +1 \\
-3x^5 & & -3x^3 & & & \\
\cline{1-3}
 & 2x^4 & -4x^3 & & & \\
 & -2x^4 & & -2x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & -4x^3 & -2x^2 & +x & \\
 & & 4x^3 & & +4x & \\
\cline{3-5}
 & & & -2x^2 & +5x & +1 \\
 & & & 2x^2 & & +2 \\
\cline{4-6}
 & & & & 5x & +3
\end{array}$$

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule. Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Analog zur Primzahlenzerlegung lassen sich auch Polynome **in einzelne Faktoren zerlegen**. Wir nennen das die Faktorisierung eines Polynoms. Betrachten wir z.B. das Polynom $x^2 - 1$, so lautet dessen Zerlegung:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Man erkennt, dass die Division genau dann **ohne Rest** $(r = 0)$ aufgeht, wenn eine **Nullstelle $\boldsymbol{x_0}$** des Polynoms $P(x)$ vorliegt.

Das Polynom $P(x)$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt die Nullstelle x_0 . Dann gibt es genau ein Polynom $F(x)$ vom Grad $n - 1$ mit der Eigenschaft:

$$P(x) = (x - x_0)\, F(x)$$

Wir sprechen von der Abspaltung eines Linearfaktors.

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Ist eine Nullstelle bekannt, so können wir durch Polynomdivision eine Teilfaktorisierung erhalten. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$$

1. Finden Sie eine Nullstelle von p. Betrachte:

   $$p(1) = 1 + 2 + 4 - 2 - 5 = 0$$

   Also ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

   $$\big(\quad x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 \big) : \big(x - 1 \big) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$$

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

3. Wir können also schreiben:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 7x + 5)$$

Nun können wir mit dem neuen Restpolynom $\tilde{p}(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$ fortfahren:

1. Finden Sie eine Nullstelle von $\tilde{p}$. Betrachte:

$$\tilde{p}(-1) = -1 + 3 - 7 + 5 = 0$$

Also ist $x_2 = -1$ eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 + 3x^2 + 7x + 5 \right) : \left(x + 1 \right) = x^2 + 2x + 5 \\
\underline{-x^3 \quad - x^2} \\
\qquad\quad 2x^2 + 7x \\
\qquad \underline{-2x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad\quad 5x + 5 \\
\qquad\qquad \underline{-5x + 5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

3. Wir können also schreiben:

$$\tilde{p} = (x+1)(x^2 + 2x + 5)$$

Da die Diskriminante $D = 2^2 - 4 \cdot 5 < 0$ ist, hat das Polynom keine weiteren reellen Nullstellen (wohl aber komplexe, dazu später mehr!) und wir haben die optimale Faktorisierung mit reellen Zahlen erreicht:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)\tilde{p} \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 5) \end{aligned}$$

Dorfmeister, J. (2010): Vorlesungsskript für den Vorkurs Mathematik für Elektrotechniker und Informationstechniker

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Aufgabe: *Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

1. Eine Nullstelle x_1 raten:

2. Durch $(x - x_1)$ dividieren:

3. Restliche Nullstellen bestimmen:

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Lösung: *Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

1. *Die erste Nullstelle* x_1 *wird „geraten" bzw. durch Ausprobieren bestimmt.* $x_1 = 1$ *ist Nullstelle der Funktion.*

2. *Das Polynom wird durch den Faktor* $(x-1)$ *dividiert. Dabei wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.*

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \quad : (x-1) = \quad x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -x^2 - 5x \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es gilt also $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1) \cdot (x^2 - x - 6)$

3. *Nun werden die Nullstellen des sich aus der Polynomdivision ergebenden Polynoms bestimmt.*

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 6 &= 0 \\
\Rightarrow \qquad & x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
& x_1 = -2,\ x_2 = 3
\end{aligned}
$$

Wie erhalten also die Nullstellen des Polynoms $\mathbb{L} = \{-2; 1; 3\}$.