

# Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. **Quadratische Gleichungen**
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**  
Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# 5. Quadratische Gleichungen



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 5.1 Reinquadratische Gleichungen

$$ax^2 + c = 0, a \neq 0$$

Die reinquadratische Gleichung  $ax^2 + c = 0$  lässt sich durch äquivalente Umformungen in folgende Form bringen:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

1.  $-\frac{c}{a} > 0$  : zwei Lösungen  $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$  und  $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ;
2.  $-\frac{c}{a} < 0$  : nicht lösbar in  $\mathbb{R}$ ;  $L = \{\}$ ;
3.  $c = 0$  : einzige Lösung  $x = 0$

Beispiele:

a)  $4x^2 - 121 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 121 \Leftrightarrow x^2 = \frac{121}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{121}{4}} = \pm \frac{11}{2}$$

b)  $\sqrt{2}x^2 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{2}}$$

c)  $x^2 + 64 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = -64 \Rightarrow \text{keine reelle Lösung}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### 5.2 Spezielle quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx = 0, \quad a, b \neq 0$$

Die Lösungen der speziellen quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx = 0$  ergeben sich durch **Ausklammern**:

$$x(ax + b) = 0$$

Nach „Produkt-Null-Satz“ ( $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$  oder  $b = 0$ ) ergibt sich, dass entweder  $x = 0$  oder  $ax + b = 0$ .

Die Lösungen sind deshalb  $x_1 = 0$  und  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .

**Beispiel:**  $x^2 - 3x = 0$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 3$$

$$L = \{0, 3\}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

## 1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

Manchmal ist es erforderlich einen Ausdruck in die Form eines Binoms zu bringen (z.B. quadratische Form einer verschobenen Parabel).

Dies geschieht mit Hilfe des 2. Binoms, indem es „rückwärts“ angewendet wird.

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Durch **quadratische Ergänzung** wird der Term  $ax^2 + bx + c = 0$  als **Summe** eines mit einem **Faktor** versehenen **Quadrats** und einem **konstanten Anteil** dargestellt:

*Nulladdition*

i. **Normalform:**  $x^2 + dx + c$ , für  $a = 1$

$$x^2 + dx + c = x^2 + dx + \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4} + c = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{d^2}{4}\right)$$

Beispiele:

$$x^2 + 2x + 3 = \left(x^2 + 2x + \frac{2^2}{4}\right) + \left(3 - \frac{2^2}{4}\right) = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2$$

$$x^2 - 4x + 7 = \left(x^2 - 4x + \frac{(-4)^2}{4}\right) + \left(7 - \frac{(-4)^2}{4}\right) = (x^2 - 4x + 4) + (7 - 4) = (x - 2)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = -3 \quad \text{?}$$

Weiter: die Nullstellen direkt berechnen wie in der reinquadratischen Gleichung!



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

## 1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

ii. Allgemeine Form:  $ax^2 + bx + c$ 

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Wir prüfen mit der binomischen Formel nach:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Beispiel: Wir formen den Term

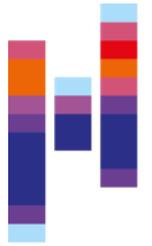
$$-3x^2 + x - 5$$

durch quadratische Ergänzung um  
und berechnen die Nullstellen:

$$\begin{aligned} -3x^2 + x - 5 &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) - 5 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{59}{12} = 0 \end{aligned}$$

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### 5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

#### 1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

ii. Allgemeine Form:  $ax^2 + bx + c$

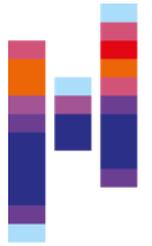
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

**Aufgabe:** Formen Sie folgenden Term mit quadratischer Ergänzung um:

$$-\frac{5}{2}x^2 + x - 9$$

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

## 2. Lösungsmethode „Mitternachtsformel“ oder „abc-Form“

Allgemeine Form:  $ax^2 + bx + c$ 

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{mit Diskriminante } D = b^2 - 4ac$$

Die Anzahl der Lösungen hängt von  $D$  ab:

- i. Für  $D > 0$  gibt es zwei Lösungen;
- ii. Für  $D = 0$  gibt es eine Lösung;
- iii. Für  $D < 0$  gibt es keine Lösungen:  $L = \{ \}$

Beispiel:  $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$

$$D = 3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow \text{es gibt zwei Lösungen}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 - \sqrt{5} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 + \sqrt{5}$$

$$L = \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

## 3. Lösungsmethode „pq-Formel“ (Sonderfall von „abc-Form“)

Nur für Normalform  $x^2 + px + q$  mit  $a = 1$  gültig:

**Beispiel:** Wir lösen die folgende Gleichung mit *quadratischer Ergänzung* und direkt mit der *pq-Formel*:

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

a. Quadratische Ergänzung ergibt:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 4 = 0$$

$$\text{bzw. } (x - 3)^2 = 5 \quad |\sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow |x - 3| = \sqrt{5}$$

b. Mit  $p = -6$  und  $q = 4$  bekommen wir:

$$b) \quad x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 4} \quad x_1 = 3 + \sqrt{5} \quad \text{und} \quad x_2 = 3 - \sqrt{5}$$

$$x_{1/2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 3 \pm \sqrt{5}$$

**pq-Formel:** Wenn die Diskriminante  $d$  nichtnegativ ist:

$$d = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zwei reelle Lösungen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Falls  $d = 0$  ist, fallen die Lösungen zu einer einzigen zusammen.



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative**  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

## 4. Lösungsmethode „Satz von Vieta“ (1540-1603)

Nur für Normalform  $x^2 + px + q$  mit  $a = 1$  gültig:

**Beispiel 1:** Gesucht ist die Normalform der quadratischen Gleichung, welche die folgenden Lösungen besitzt :

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ und } x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Lösung: Nach Satz von Vieta gilt

$$p = -(x_1 + x_2) = -(1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}) = -2$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow \text{Normalform lautet: } x^2 - 2x - 1 = 0$$

**Beispiel 2:**

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 35$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 5$$

$$\Rightarrow L = \{5, 7\}$$

**Beispiel 3:**

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 1$$

$$\Rightarrow L = \{-2, 1\}$$

**Satz von Vieta** Sei  $(\frac{p}{4})^2 - q \geq 0$ , dann besitzt die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zwei Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ . Es gilt

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

und

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## 5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

## 5. Sonderfälle

Beispiel

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0 \quad x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_2 = -1, \quad x_3 = -3$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 0\}$$

Beispiel:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad \text{Substitution: } z = x^2$$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$z_1 = \frac{10+8}{2} = 9 \quad x^2 = z_1 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$$

$$z_2 = \frac{10-8}{2} = 1 \quad x^2 = z_2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 1, 3\}$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

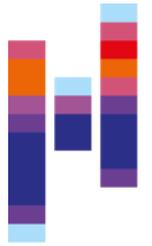
ausgezeichnet als:

**Innovative**  
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. **Wurzelgleichungen**
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe

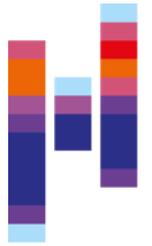


**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**  
Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# 6. Wurzelgleichungen



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### Allgemeine Gleichungen

Neben den bisher beschriebenen (Standard-)Formen können Gleichungen natürlich auch jede andere mathematische Form haben.

Beispiele:

$$\ln x - \ln x^2 = 5,$$

$$\sqrt{x+3} = 2 + 5x$$

$$\sin x = \frac{x}{2}$$

Indem man die linke Seite einer Gleichung auf die rechte Seite bringt, erhält man folgende Aussage:

Die allgemeinste Form einer Gleichung ist  $f(x) = 0$

Dies bedeutet:

Das Lösen einer Gleichung entspricht der Suche nach den Nullstellen einer Funktion.



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

### Definition und Lösungsweg

Gleichungen mit Wurzel, in **deren Radikanden die Unbekannte  $x$**  vorkommt, heißen Wurzelgleichungen.

Falls nur eine Wurzel der Form  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  auftritt und außerhalb der Wurzel die Unbekannte  $x$  nur linear vorkommt, bietet sich folgender Lösungsweg an:

1. Man bringe die Wurzel auf eine Seite.
2. Man quadriere beide Seiten der umgeformten Gleichung.

**!** Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, da durch das Quadrieren kommt eine Lösung dazu.

3. Man löse die entstehende Gleichung.
4. Man überprüfe, welche der Lösungen die Ausgangsgleichung tatsächlich erfüllt → **Probe!**



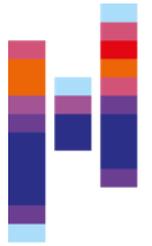
Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## Beispiele



1.

$$14 - \sqrt{x^2 + x - 14} = 2x$$

$$\Leftrightarrow 14 - 2x = \sqrt{x^2 + x - 14} \quad | \quad ()^2$$

$$\Leftrightarrow (14 - 2x)^2 = x^2 + x - 14$$

$$\Leftrightarrow 196 - 56x + 4x^2 = x^2 + x - 14$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 57x + 210 = 0 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 19x + 70 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4} - 70} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{19}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$$x_1 = 5, x_2 = 14$$

Probe :

$$14 - \sqrt{14^2 + 14 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 14$$

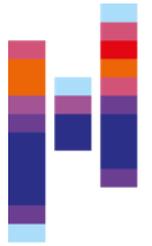
$$14 - 14 \neq 28$$

$$14 - \sqrt{5^2 + 5 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 5$$

$$14 - 4 = 10$$

Das heißt,  $x_1 = 5$  erfüllt die Gleichung, wohingegen  $x_2 = 14$  nicht als Lösung in Frage kommt.

## Beispiele



2.

$$1 - x = \sqrt{5x - 11} \quad | \quad ()^2$$

$$(1 - x)^2 = 5x - 11$$

$$1 - 2x + x^2 = 5x - 11$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4$$

Probe :

$$1 - 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 3 - 11}$$

$$-2 \neq 2$$

$$1 - 4 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 4 - 11}$$

$$-3 \neq 3$$

*Weder  $x_1 = 3$  noch  $x_2 = 4$  erfüllen die Gleichung.*

# Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**  
Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# 7. Gleichungen n-ten Grades



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**   
Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# Polynome

Eine **Gleichung n-ten Grades** oder **Polynom vom Grad n** ist eine Summe von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten. Allgemein schreibt man:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Die Parameter  $a_k$  werden dabei als **Koeffizienten** bezeichnet.

## Beispiele:

1. Polynom 4. Grades:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^2 + x,$$

2. Polynom 3. Grades:

$$P(x) = 3x^3 - 2x - 1$$

3. Polynom 1. Grades (Gerade):

$$P(x) = -3x + 2$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# Polynome

Polynome können wir addieren:

Durch die Addition von Polynomen entsteht wieder ein Polynom. Addieren wir die Polynome

$$P(x) = 3x^3 - 2x - 1 \quad \text{und} \quad Q(x) = -4x^4 + 2x^3 - 3x + 2,$$

so entsteht das Polynom

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - 2x - 1 - 4x^4 + 2x^3 - 3x + 2 = -4x^4 + 5x^3 - 5x + 1.$$

Polynome können wir dividieren.

Wie bei den **ganzen Zahlen** kann eine **Division aufgehen** oder es kann ein **Rest** bleiben.

Ähnliches gilt nun für Polynome. Offensichtlich enthält das Polynom:

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

das Polynom  $Q(x) = x + 1$  als Teiler:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = x + 1.$$



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# Nullstellen

Die Lösungen der Gleichung  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  stellen die Nullstellen des Polynoms  $f(x)$  dar. Für Polynome vom Grad  $n \geq 3$  sind die Nullstellen häufig nicht mit elementaren Rechenmethoden lösbar. In diesem Fall werden die Lösungen numerisch bestimmt/angenähert.

Das Hornerschema

Polynomdivision



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## Polynomdivision

Ist  $P(x)$  ein Polynom vom Grad  $n$ ,  $Q(x)$  ein Polynom vom Grad  $m$  und  $n \geq m \geq 1$ . Dann gibt es genau ein Polynom  $F(x)$  (Quotient) vom Grad  $n - m$  und genau ein Polynom  $R(x)$  (Rest) mit einem Grad kleiner als  $m$ , so dass gilt:

$$P(x) = F(x) Q(x) + R(x)$$

Wir können die Polynomdivision mit Rest durchführen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Betrachten wir zum Vergleich den Algorithmus zur Division von natürlichen Zahlen mit Rest:

7295	:	13	=	561	+	2	:	13
-65								
795								
-78								
15								
-13								
2								
Dividend	Divisor	Quotient	Rest					
15	: 5	= 3	0					
7295	: 13	= 561	$\frac{2}{13}$					

Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$\begin{aligned} 7295 &= 13 \cdot 500 + 795, \\ 795 &= 13 \cdot 60 + 15, \\ 15 &= 13 \cdot 1 + 2. \end{aligned}$$

**Grundidee:** Bei jedem Schritt wird die **Stellenzahl** des Restes **um eins erniedrigt**, bis der Rest kleiner als der Divisor ist. Analog dazu geht man bei Polynomen vor und erniedrigt den Grad des Restpolynoms solange um eins, bis der Rest einen kleineren Grad als der Divisor hat.



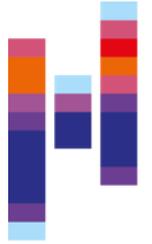
Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## Polynomdivision



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

Wir führen folgende Polynomdivision algorithmisch durch:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 \quad \quad \quad + 3x \quad - 2) : (x^2 + 2) = x^2 - 2 + \frac{3x + 2}{x^2 + 2} \\
 \underline{-(x^4 \quad + 2x^2)} \phantom{+ 3x - 2} \\
 \phantom{(} - 2x^2 + 3x - 2 \\
 \phantom{(} \underline{-( - 2x^2 \phantom{+ 3x} - 4)} \\
 \phantom{(} \phantom{+ 3x} + 2
 \end{array}$$

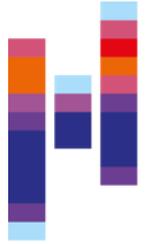
Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 3x - 2 &= x^2(x^2 + 2) - 2x^2 + 3x - 2, \\
 -2x^2 + 3x - 2 &= -2(x^2 + 2) + 3x + 2.
 \end{aligned}$$

$$\frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

- Dividend und Divisor nach den Potenzen in der Reihe nach „sortieren“.
- Wenn eine Potenz fehlt, schreiben Sie die fehlende Potenz als Null auf.
- Bei Polynomdivision wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.
- Division abbrechen, wenn der Rest um ein Grad kleiner als Divisor ist.

## Polynomdivision



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 (3x^5 + 2x^4 - x^3 + 0x^2 + x + 1) : (x^2 + 1) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 2 \\
 \hline
 - \quad 3x^5 \quad + 3x^3 \quad \downarrow \\
 \quad 2x^4 - 4x^3 + 0x^2 + x + 1 \\
 \hline
 - \quad 2x^4 \quad + 2x^2 \\
 \quad -4x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
 \hline
 - \quad -4x^3 \quad - 4x \\
 \quad -2x^2 + 5x + 1 \\
 \hline
 - \quad -2x^2 \quad - 2 \\
 \quad \quad \quad 5x + 3
 \end{array}$$

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

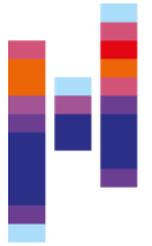
$$- \frac{4x^3}{x^2} = -4x$$

$$- \frac{2x^2}{x^2} = -2$$

## Polynomdivision

Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 (3x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1) : (x^2 + 1) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 2 + \frac{5x + 3}{x^2 + 1} \\
 \underline{-3x^5 \phantom{+ 2x^4} - 3x^3} \\
 2x^4 - 4x^3 \\
 \underline{-2x^4 \phantom{- 4x^3} - 2x^2} \\
 -4x^3 - 2x^2 + x \\
 \underline{4x^3 \phantom{- 2x^2} + 4x} \\
 -2x^2 + 5x + 1 \\
 \underline{2x^2 \phantom{+ 5x} + 2} \\
 5x + 3
 \end{array}$$



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**   
Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Analog zur Primzahlenzerlegung lassen sich auch Polynome **in einzelne Faktoren zerlegen**. Wir nennen das **die Faktorisierung eines Polynoms**. Betrachten wir z.B. das Polynom  $x^2 - 1$ , so lautet dessen Zerlegung:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Man erkennt, dass die Division genau dann **ohne Rest** ( $r = 0$ ) aufgeht, wenn eine **Nullstelle**  $x_0$  des Polynoms  $P(x)$  vorliegt.

Das Polynom  $P(x)$  vom Grad  $n \geq 1$  besitzt die Nullstelle  $x_0$ . Dann gibt es genau ein Polynom  $F(x)$  vom Grad  $n - 1$  mit der Eigenschaft:

$$P(x) = (x - x_0) F(x)$$

Wir sprechen von der **Abspaltung eines Linearfaktors**.



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Ist **eine Nullstelle** bekannt, so können wir durch Polynomdivision eine Teilfaktorisation erhalten.  
Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$$

1. Finden Sie eine Nullstelle von  $p$ . Betrachte:

$$p(1) = 1 + 2 + 4 - 2 - 5 = 0$$

Also ist  $x_1 = 1$  eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

$$\left( x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 \right) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$$



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

3. Wir können also schreiben:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + 7x + 5)$$

Nun können wir mit dem neuen Restpolynom  $\tilde{p}(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$  fortfahren:

1. Finden Sie eine Nullstelle von  $\tilde{p}$ . Betrachte:

$$\tilde{p}(-1) = -1 + 3 - 7 + 5 = 0$$

Also ist  $x_2 = -1$  eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

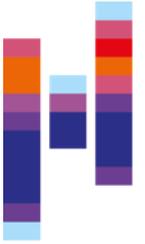
$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 + 7x + 5) : (x + 1) = x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-x^3 \quad -x^2} \phantom{+ 7x + 5} \\ 2x^2 + 7x \phantom{+ 5} \\ \underline{-2x^2 \quad -2x} \phantom{+ 5} \\ 5x + 5 \\ \underline{-5x \quad -5} \\ 0 \end{array}$$

3. Wir können also schreiben:

$$\tilde{p} = (x + 1)(x^2 + 2x + 5)$$

Da die Diskriminante  $D = 2^2 - 4 \cdot 5 < 0$  ist, hat das Polynom keine weiteren reellen Nullstellen (wohl aber komplexe, dazu später mehr!) und wir haben die optimale Faktorisierung mit reellen Zahlen erreicht:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)\tilde{p} \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2x + 5) \end{aligned}$$



**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

# Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ .

1. Eine Nullstelle  $x_1$  raten:

2. Durch  $(x - x_1)$  dividieren:

3. Restliche Nullstellen bestimmen:

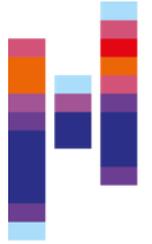


**Hochschule  
Flensburg**  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**  
Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

## Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision



Hochschule  
Flensburg  
University of  
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative  
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative  
von Bund und Ländern

**Lösung:** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ .

1. Die erste Nullstelle  $x_1$  wird „geraten“ bzw. durch Ausprobieren bestimmt.  $x_1 = 1$  ist Nullstelle der Funktion.
2. Das Polynom wird durch den Faktor  $(x - 1)$  dividiert. Dabei wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{-(-x^2 + x)} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-(-6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Es gilt also  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6)$

3. Nun werden die Nullstellen des sich aus der Polynomdivision ergebenden Polynoms bestimmt.

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
 x_1 &= -2, x_2 = 3
 \end{aligned}$$

Wie erhalten also die Nullstellen des Polynoms  $\mathbb{L} = \{-2; 1; 3\}$ .