Hochschule Flensburg

Mathematik-Vorbereitungskurs für Ingenieurstudierende

Valentina Kluge

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

1. Rechengesetze

1. Rechengesetze

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Das griechische Alphabet

α	A	alpha	ι	I	iota	ρ	P	rho
β	B	beta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	my	υ	Υ	ypsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	ny	φ	Φ	phi
ζ	Z	zeta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	eta	o	O	omikron	ψ	Ψ	psi
ϑ	Θ	theta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Relationen zwischen Zahlen

$a = b$ – „a gleich b“

$a \neq b$ – „a ungleich b“

$a < b$ – „a kleiner b“

$a > b$ – „a größer b“

$a \leq b$ – „a kleiner oder gleich b“

$a \geq b$ – „a größer oder gleich b“

$a \approx b$ – „a ungefähr gleich b“

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Logische Zeichen (zwischen Aussagen oder Aussageformen)

$A \Rightarrow B$ – „wenn A, dann B“, „aus A folgt B“

$A \Leftrightarrow B$ – „A genau dann, wenn B“, „A äquivalent (= gleichbedeutend) B“

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Mengenschreibweise

Eigenschaft

- Aufzählende Form $M_1 = \{1, 2, 3\}$
- Beschreibende Form $M_1 = \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl und } x < 4\}$

  „Menge aller x, für die gilt: x ist natürliche Zahl und $x < 4$“
- $3 \in M_1$ - „3 ist Element von M_1“
- $5 \notin M_1$ - „5 ist nicht Element von M_1“
- $\emptyset = \{\ \}$ – leere Menge, enthält kein Element

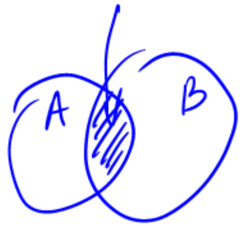
1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Operationen mit Mengen

$M_1 \cup M_2$ - „M_1 vereinigt mit M_2“, „Vereinigungsmenge“
enthält alle Elemente, die zu M_1 **oder** M_2 gehören
(nicht ausschließendes oder)

→ Quantor „logisches ODER“: $\vee$

$A \cap B$



$M_1 \cap M_2$ - „M_1 geschnitten mit M_2“, „Schnittmenge“, „Durchschnitt“
enthält alle Elemente, die zu M_1 **und** zu M_2 gehören

→ Quantor „logisches UND“: $\wedge$

$M_1 \setminus M_2$ - „M_1 ohne M_2“, „Differenzmenge“
enthält alle Elemente, die zu M_1, aber nicht zu M_2 gehören

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Operationen mit Mengen

Beispiele:

$$M_1 = \{1, 2, 3\}$$
$$M_2 = \{2, 4, 6\}$$

Bilden Sie:

$M_1 \cup M_2 =$ $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

$M_1 \cap M_2 =$ $\{2\}$

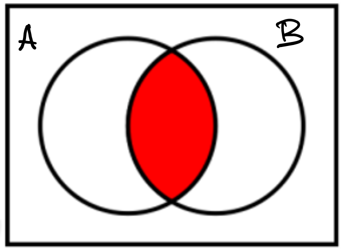
$M_1 \setminus M_2 =$ $\{1, 3\}$

$M_2 \setminus M_1 =$ $\{4, 6\}$

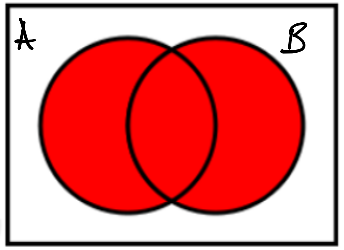
1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Operationen mit Mengen

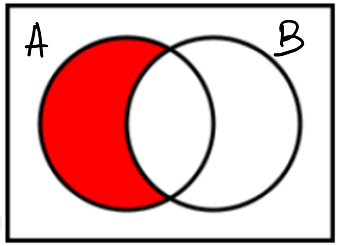
Darstellung der Mengenoperationen mit Venn-Diagrammen:



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Relationen zwischen Mengen

$M_1 = M_2$ - „M_1 gleich M_2“,

M_1 und M_2 besitzen dieselben Elemente

$x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$

$M_1 \subset M_2$ - „M_1 ist Teilmenge von M_2“,

jedes Element von M_1 ist auch Element von M_2

$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$

Sonderfälle: $\emptyset \subset M$, die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge M $\subset M$

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Zahlenmengen

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

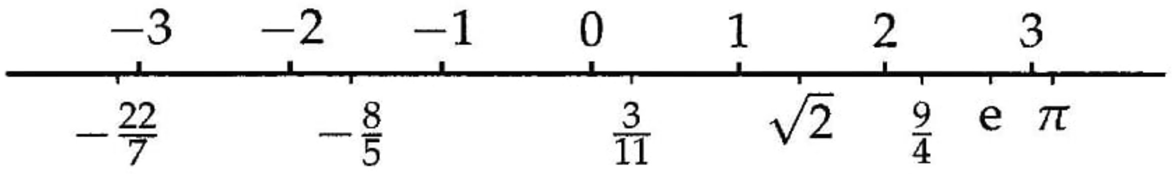
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = (\mathbb{N}^+$ - Menge aller natürlichen Zahlen)

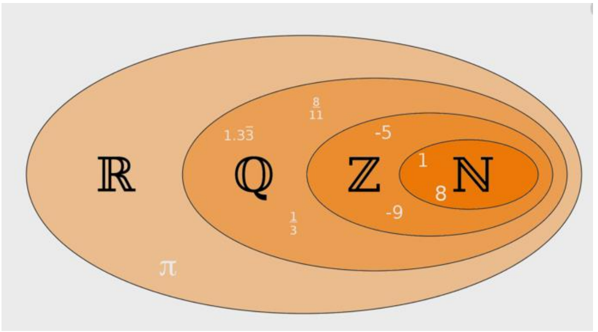
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = (\mathbb{N}$ (nach DIN 5473))

$\mathbb{Z} = [\text{Zahl}] = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - Menge aller ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = [\text{Quotient}] = \{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ - Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen (aller abbrechenden und nicht abbrechenden Dezimalzahlen z.B. $-85,\ \frac{1}{3},\ \sqrt{2},\ 25{,}385, \pi, \dots$)





$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Addition

$a + b = b + a$	Kommutativgesetz (KG)	(Vertauschungsgesetz)
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assioziativgesetz (AG)	(Verbindungsgesetz)
$a + 0 = a$	Neutrales Element (NE)	
$a + (-a) = 0$	Inverses Element (IE)	

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Multiplikation

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= b \cdot a && \text{(KG)} \\
(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) && \text{(AG)} \\
a \cdot 1 &= a && \text{(NE)} \\
a \cdot \frac{1}{a} &= 1 && \text{(IE)}
\end{aligned}
$$

$2ab$

$2(a \cdot b) \neq 2a \cdot 2b \rightarrow 2(a \cdot b) = 2ab$

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$ → Ausmultiplizieren

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$ ← Ausklammern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Nur Strichrechnungen:

Rechne von links nach rechts, dann machst du nichts falsch.

$$\begin{aligned} & 37{,}7 - 18{,}2 + 12{,}8 \\ = \; & 19{,}5 + 12{,}8 \\ = \; & 32{,}3 \end{aligned}$$

Nur Punktrechnungen:

Rechne von links nach rechts, dann machst du nichts falsch.

$$\begin{aligned} & 36 : 4 \cdot 2 \\ = \; & 9 \cdot 2 \\ = \; & 18 \end{aligned}$$

Punkt- vor Strichrechnung:

Punktrechnungen werden vor Strichrechnungen ausgeführt.

$$\begin{aligned} & 13{,}4 + 6 \cdot 9 \\ = \; & 13{,}4 + 54 \\ = \; & 67{,}4 \end{aligned}$$

Klammern zuerst:

Was in Klammern steht, wird zuerst ausgerechnet.

$$\begin{aligned} & 8 \cdot (25{,}75 - 16{,}75) \\ = \; & 8 \cdot 9 \\ = \; & 72 \end{aligned}$$

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Produkt-Null-Satz:

$a \cdot b = 0$ *ist gleichbedeutend damit, dass einer der folgenden drei Fälle eintritt:*

1. $a = 0$ *und* $b \neq 0$
2. $b = 0$ *und* $a \neq 0$
3. $a = 0$ *und* $b = 0$

Damit ein Produkt gleich Null ist, muss mindestens einer der Faktoren gleich Null sein.

z.B. $a^3 \cdot (a - 1) = 0$

$a^3 = 0$ oder $a - 1 = 0$

$a = 0$ oder $a = 1$

$\mathbb{L} = \{0, 1\}$

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Aus den Körperaxiomen leiten sich folgende Vorzeichenregeln ab:

$$\begin{aligned} -(-a) &= a \\ -(a+b) &= -a-b \\ (-a)\cdot b &= -a\cdot b \\ (-a)\cdot(-b) &= a\cdot b \\ \frac{1}{-a} &= -\frac{1}{a} \text{ für } a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

nicht: $-\frac{a}{b} \neq \frac{-a}{-b}$

$(-1)\cdot \frac{a}{b}$

$(+)\cdot(+) = (+)$
$(-)\cdot(+) = (-)$
$(+)\cdot(-) = (-)$
$(-)\cdot(-) = (+)$

$(+):(+) = (+)$
$(-):(+) = (-)$
$(+):(-) = (-)$
$(-):(-) = (+)$

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Beispiele

Beispiel 1:

1.) $-\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3},$

2.) $-(2+5) = -2-5 = -7, \text{oder} -(2+5) = -(7) = -7,$

3.) $(-3)\cdot 5 = 3\cdot(-5) = -(3\cdot 5) = -15,$

4.) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6},$

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Beispiele

Beispiel 2:

Wo steckt der Fehler?

a) $4(3x + y) = 12x + 4y$

b) $8u(4v - 2w) = 32uv \overset{-}{\cancel{+}} 16uw$

c) $0{,}5\,a\,b + b = 0{,}5\,b\,(a + \overset{2}{\cancel{1}}) = 0{,}5ab + \underbrace{0{,}5b \cdot 2}_{1 \cdot b = b}$

$0{,}5ab + 0{,}5b$

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Beispiele

Beispiel 2:

Wo steckt der Fehler?

a) $4(3x + y) = 12x + 4y$

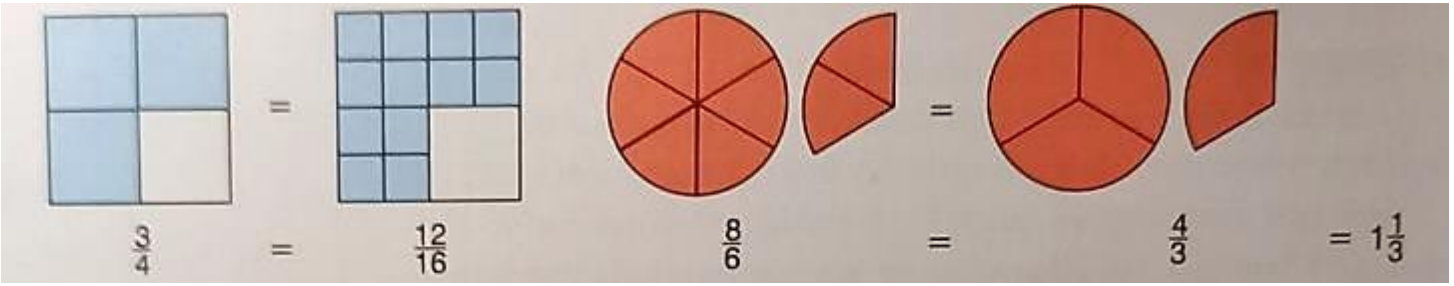
b) $8u(4v - 2w) = 32uv \underset{\neq}{\overset{-}{+}} 16uw$

c) $0{,}5\,a\,b + b = 0{,}5\,b\,(a + \overset{2}{\cancel{1}})$

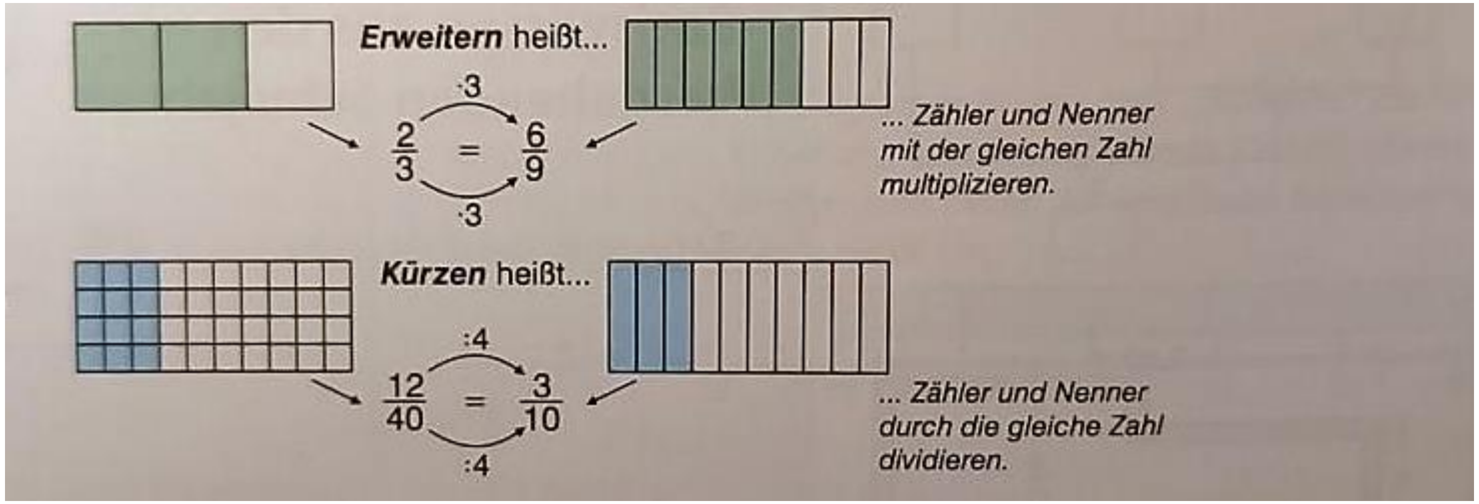
1.3. Brüche

Erweitern und Kürzen

Gleiche Brüche – verschiedene Namen:



Erweitern und Kürzen:



1.3. Brüche

Rechenregeln

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$ $\qquad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $\qquad \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ $\qquad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{11}{15}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$ $\qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$ $\qquad 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$ $\qquad \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$

7) Kehrwert: $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$ $\qquad \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

$7 \xrightarrow{\text{Kehrwert}} \frac{1}{7}$

$\frac{1}{5} \xrightarrow{\text{Kehrwert}} 5$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

1.3. Brüche

Rechenregeln

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$

Falsch: $\frac{\cancel{2x}+5}{\cancel{2x}+3}$

Richtig: $\frac{\cancel{2x} \cdot 5}{\cancel{2x} \cdot 3}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

1.3. Brüche

Rechenregeln

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Falsch: $\frac{\cancel{2x}+5}{\cancel{2x}+3}$

Richtig: $\frac{\cancel{2x}\cdot 5}{\cancel{2x}\cdot 3}$

$5 = \frac{5}{1}$ $\quad -4 = \frac{-4}{1}$

1.3. Brüche

Rechenregeln

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Falsch: $\frac{\cancel{2x}+5}{\cancel{2x}+3}$

Richtig: $\frac{\cancel{2x}\cdot 5}{\cancel{2x}\cdot 3}$

$5 = \frac{5}{1}$ $\quad -4 = \frac{-4}{1}$

$a \cdot \frac{b}{c} \neq \frac{a \cdot b}{a \cdot c}$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Rechenregeln

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Falsch: $\frac{\cancel{2x}+5}{\cancel{2x}+3}$

Richtig: $\frac{\cancel{2x} \cdot 5}{\cancel{2x} \cdot 3}$

$5 = \frac{5}{1}$ $-4 = \frac{-4}{1}$

$a \cdot \frac{b}{c} \neq \frac{a \cdot b}{a \cdot c}$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$7^{-1} = \frac{1}{7} ; \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7$

1.3. Brüche

Rechenregeln

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Die Rechenregeln für Brüche gelten ebenfalls, wenn im Nenner oder Zähler Brüche, reelle Zahlen oder Terme eingesetzt werden.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\,\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{3b^3}{a^2} - \frac{4c}{a^2} = \frac{3b^3 - 4c}{a^2}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{3b}{a+1} + \frac{a}{2} = \frac{3b \cdot 2 + a \cdot (a+1)}{(a+1) \cdot 2} = \frac{a^2 + a + 6b}{2a+2}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{\frac{1}{2}}{3} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4}{3 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{2}{5}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $(a^2+1) \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^2+1}{1} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{(a^2+1) \cdot 2a}{3} = \frac{2a^3 + 2a}{3}$

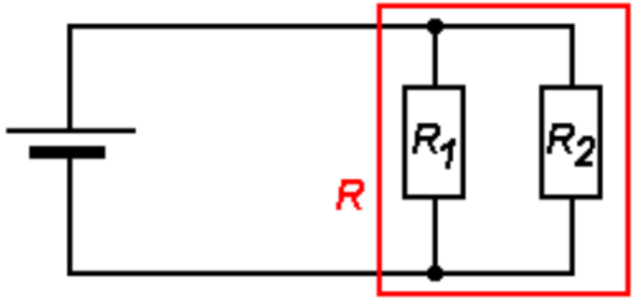
6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a+1}{2}}{\frac{a+1}{3}} = \frac{a+1}{2} : \frac{a+1}{3} = \frac{a+1}{2} \cdot \frac{3}{a+1} = \frac{\cancel{(a+1)}3}{2\cancel{(a+1)}} = \frac{3}{2}$

7) Kehrwert : $\frac{1}{\frac{\frac{1}{2}a}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{2}a}$

1.3. Brüche

Beispiel

Bei der Parallelschaltung ist der **Kehrwert** des **Gesamtwiderstandes R** gleich der **Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände**. Wir betrachten eine Parallelschaltung mit zwei Einzelwiderständen R_1 und R_2 :



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Um den Gesamtwiderstand R zu bestimmen, berechnen wir den Kehrwert des Ausdrucks:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Die Widerstände R_1 und R_2 sind größer als Null. Folglich ist auch $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ von Null verschieden und wir brauchen keine Fallunterscheidung vorzunehmen. Wir erhalten:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1 R_2} + \frac{R_1}{R_1 R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

$$= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

1.3. Brüche

Anwendung: Umrechnen von Einheiten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Eine wichtige Anwendung der Bruchrechnung im alltäglichen Leben des Ingenieurs ist das Umrechnen von Einheiten in Ausdrücken, z.B. einer Geschwindigkeit von $\frac{cm}{s}$ in $\frac{km}{h}$.

Mit den Beziehungen $km = 10^5 cm$ und $h = 3600s$ ist dies einfache Bruchrechnung, z.B.

$$50\frac{cm}{s} = 50 \cdot \frac{\frac{km}{10^5}}{\frac{h}{3600}} = 50\frac{3600}{10^5}\frac{km}{h} = 1{,}8\frac{km}{h}$$

Bevor man unnötige Fehler macht, sollte man im Zweifel solche Beziehungen lieber etwas ausführlicher hinschreiben.

1.3. Brüche

Anwendung: Umrechnen von Einheiten

1 km = 1000 m

$\cdot 1000$

1 m = 10 dm

$\cdot 10$

1 dm = 10 cm

$\cdot 10$

1 cm = 10 mm

Umrechnungszahl 10

1 ha = 100 a

$\cdot 100$

1 a = 100 m^2

$\cdot 100$

1 m^2 = 100 dm^2

$\cdot 100$

1 dm^2 = 100 cm^2

$\cdot 100$

1 cm^2 = 100 mm^2

Umrechnungszahl 100

1.3. Brüche

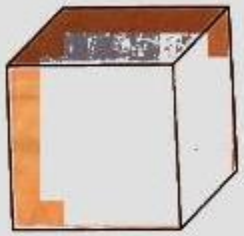
Anwendung: Umrechnen von Einheiten

Umrechnungszahl 1000

$1\ m^3 = 1000\ dm^3$ $\cdot 1000$

$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$ $\cdot 1000$

$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$



Das Volumen von Flüssigkeiten wird in Litern gemessen.

$1\ l = 1\ dm^3$ $\quad 1\ ml = 1\ cm^3$

Umrechnungszahl 1000

$1\ t = 1000\ kg$ $\cdot 1000$

$1\ kg = 1000\ g$ $\cdot 1000$

$1\ g = 1000\ mg$

Umrechnungszahlen 24 und 60

$1\ \text{Tag} = 24\ h$ $\cdot 24$

$1\ h = 60\ min$ $\cdot 60$

$1\ min = 60\ s$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

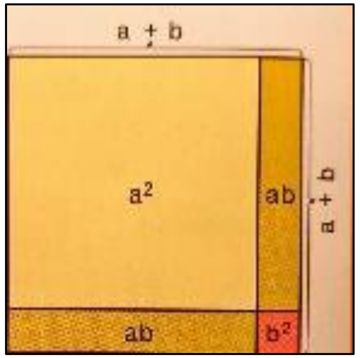
1.4. Binomische Formeln

Rechenregeln

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Graphische Interpretation der 1. binomischen Formel:



Wir bestätigen die binomischen Formeln durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\ &= aa + ba + ab + bb \\ &= a^2 + 2ab + b^2,\end{aligned}$$

$$(x+6)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = (a-b)a + (a-b)b \\ &= aa - ba - ab + bb \\ &= a^2 - 2ab + b^2,\end{aligned}$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)a + (a+b)(-b) \\ &= aa + ba - ab - bb \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

$$(3x+5)(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

1.4. Binomische Formeln

Rechenregeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Was ist hier falsch?

a) $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 30xy + (5y)^2 = 9x^2 + \underbrace{2 \cdot 3x \cdot 5y}_{30xy} + 25y^2$

b) $(1+x)(1-x) = x^2 + 1$

$= 1 - x^2$

$= -(x^2 - 1)$

1.4. Binomische Formeln

Binomische Formeln rückwärts (von rechts nach links)

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele:

$4x^2 + 28x + 49 = ?$

Der erste Term ist das Quadrat von $2x$:

$(2x)^2 = 4x^2$

Der dritte Term ist das Quadrat von 7:

$7^2 = 49$

Der mittlere Term ist:

$2 \cdot 2x \cdot 7 = 28x$

Also $4x^2 + 28x + 49 =$

$(2x+7) \cdot (2x+7) = (2x+7)^2$

Bilden Sie binomische Formeln:

a) $100 - y^2 =$

b) $a^2 + 6ab + 9b^2 =$

c) $25x^2 - 15xy + 3y^2 =$

1.4. Binomische Formeln

Anwendung

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Mit den binomischen Formeln berechnen wir: $1{,}001^2$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
1{,}001^2 &= \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^2 \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \\
&= 1 + \frac{2}{1000} + \frac{1}{1000000} = 1 + 0{,}002 + 0{,}000001 \\
&= 1{,}002001\,.
\end{aligned}
$$