Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13. Vektoren – Grundbegriffe

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

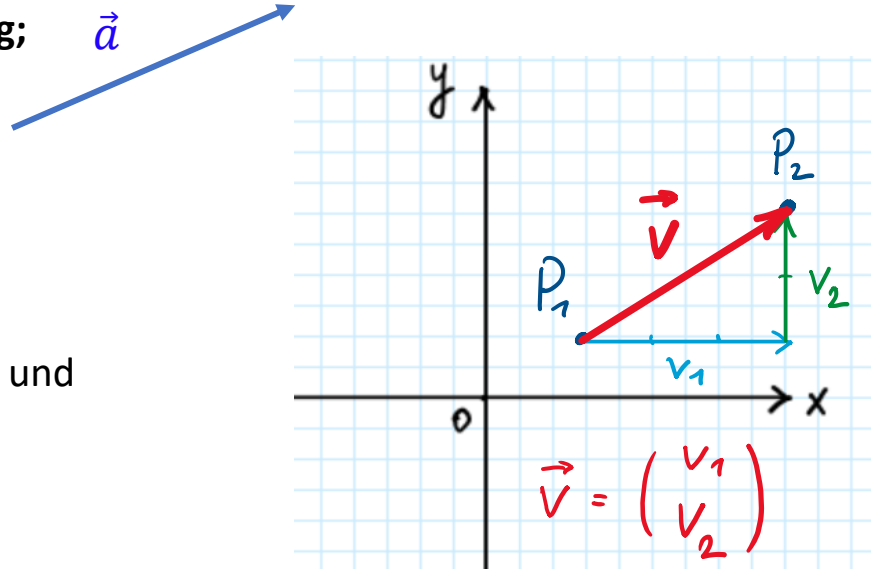
Definition – Koordinaten

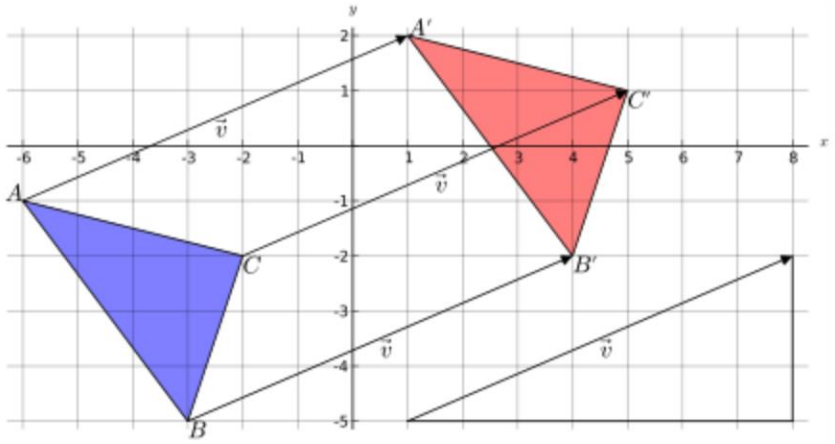
- Vektoren – Objekte mit einer vorgegebenen **Länge** und **Richtung;**
- $|v|$ ist **Betrag** des Vektors $\vec{v}$.
- **Anwendung:** Darstellung der physikalischen Kräfte wie Geschwindigkeit oder Strömungsrichtungen im Raum;
- Vektoren – Parallelverschiebungen von Elementen
  - wir verschieben den Punkt P_1 um v_1 Einheiten in x-Richtung und v_2 Einheiten in y-Richtung.
  - P_1P_2 – ein **Verschiebungspfeil**
  - Parallelverschiebung eines Dreiecks um den Vektor $\vec{v}$
  - Schreibweise – **Zahlenspalte (Koordinaten eine Vektors):**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Ermitteln von Vektoren: „Spitze minus Schaft“

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} A'_x - A_x \\ A'_y - A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-6) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$





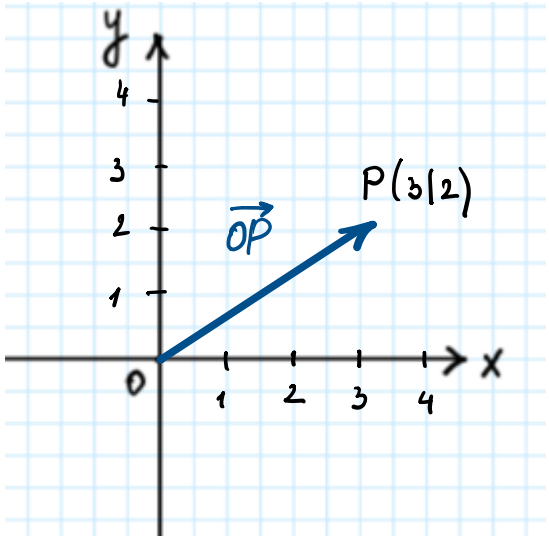
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Vektor#/media/Datei:Vektoren.svg

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

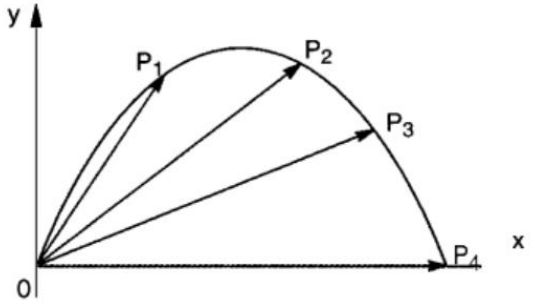
13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Begriffe

- **Nullvektor** – Vektor der Länge Null $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. $\left|\vec{0}\right| = 0$
- Zwei Vektoren sind **gleich**, senn ihre Koordinaten übereinstimmen, d.h.
  - gleiche Länge = Betrag
  - gleiche Richtung
- **Ortsvektor** (Koordinatenvektor, Zeiger, „gebundener Vektor“)
  - Gegeben Punkt $(3|2)$
  - $\overrightarrow{OP}$ – Pfeil zum Punkt P vom Ursprung O
  - Legen wir fest, dass die Zahlenspalte $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ nur durch den Pfeil $\overrightarrow{OP}$ dargestellt wird (und nicht durch andere verschiebungsgleiche zu $\overrightarrow{OP}$), dann nennt man $\overrightarrow{OP}$ ein **Ortsvektor**.
  - Die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ sind einfach die **Koordinaten** des **Punktes P**
  - Andere Schreibweise: $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - **Beispiel**: Ortsvektoren der Bahnkurve eines schief nach oben geworfenes Körpers



$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Ortsvektor eines Punktes

- **Ortsvektor eines Punktes - Aufgabe**
  Eine Verschiebung ist durch den Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bestimmt, wobei A(2|4) und B(5|1) ist. Für welchen Punkt ist $\vec{a}$ Ortsvektor?

$$\vec{a} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$ → Ortsvektor zum Punkt $P(3|-3)$

„Spitze minus Schaft"

Lösung: $P(3|-3)$

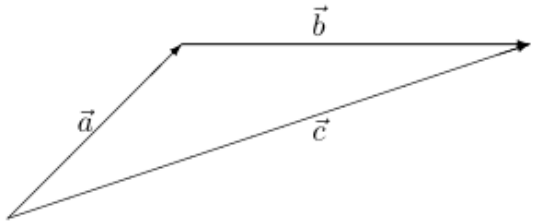
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

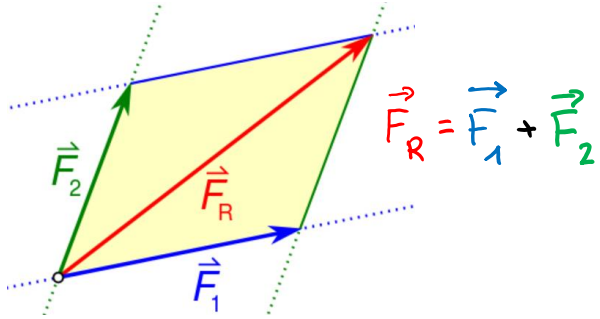
13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Addition und Subtraktion

- **Addition**

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

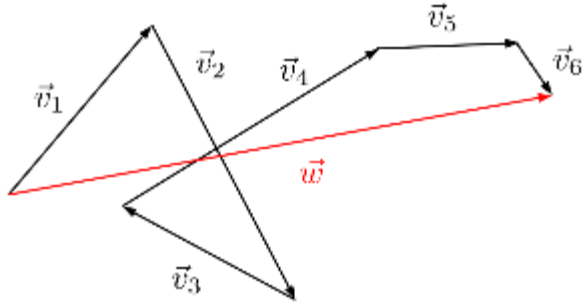




Summe einer geschlossenen Vektorkette ist gleich $\vec{0}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$



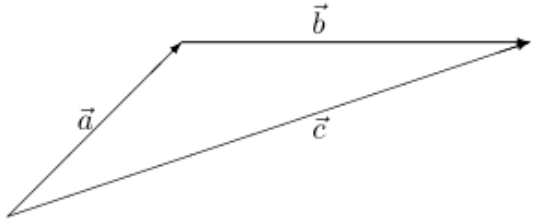
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

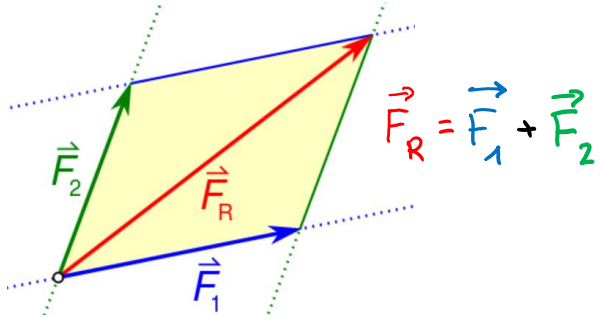
13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Addition und Subtraktion

- **Addition**

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

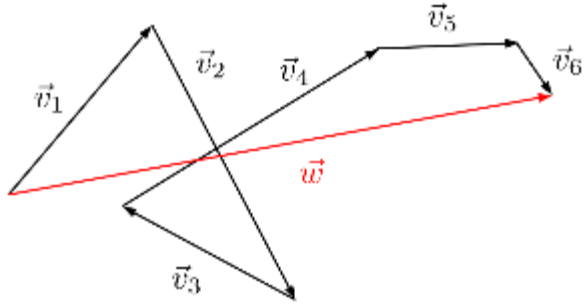




$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

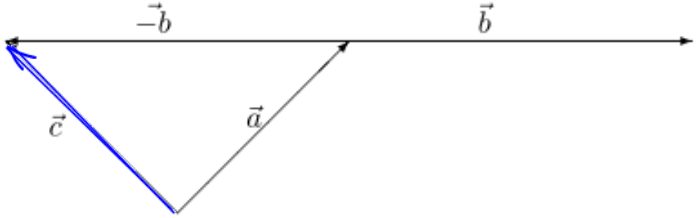
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Summe einer geschlossenen Vektorkette ist gleich $\vec{0}$



- **Subtraktion**

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

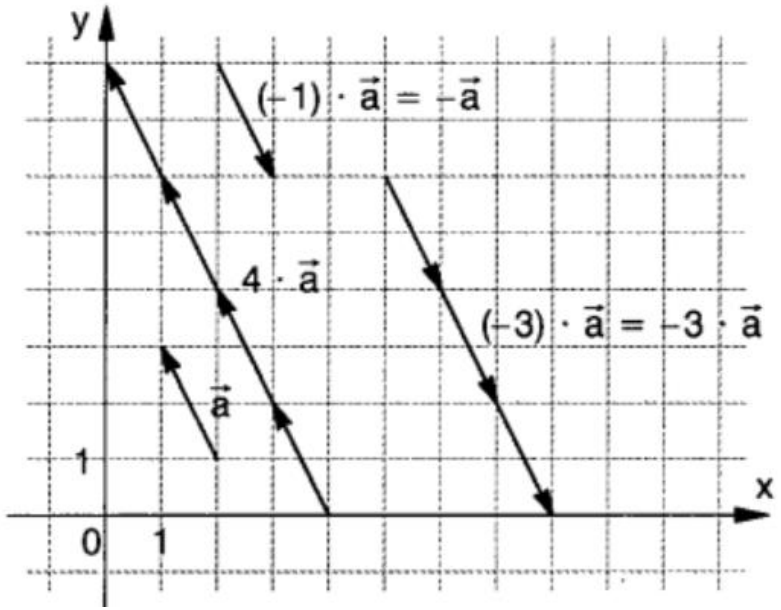
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Multiplikation mit einem Skalar

- **Vielfaches - Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar k :**



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_1 \\ k \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3a_x \\ 3a_y \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Betrag

- **Betrag:**

Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, so heißt $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ **Betrag** oder **Länge von $\vec{a}$**.
Der Betrag von $\vec{a}$ wird auch mit a bezeinet.

- Der **Betrag** eines Vektors ist – geometrisch veranschaulicht – gleich (dem Zahlenwert) der Länge eines Pfeiles, der den Vektor darstellt.
- Die Formel für Betrag lässt sich aus dem Pythagoras-Satzes ableiten:

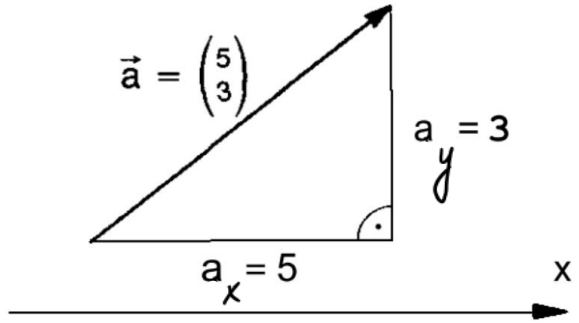
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

- **Beispiel:** Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung: $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{F}$, $F = 100\ N = |\vec{F}|$

$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = x$



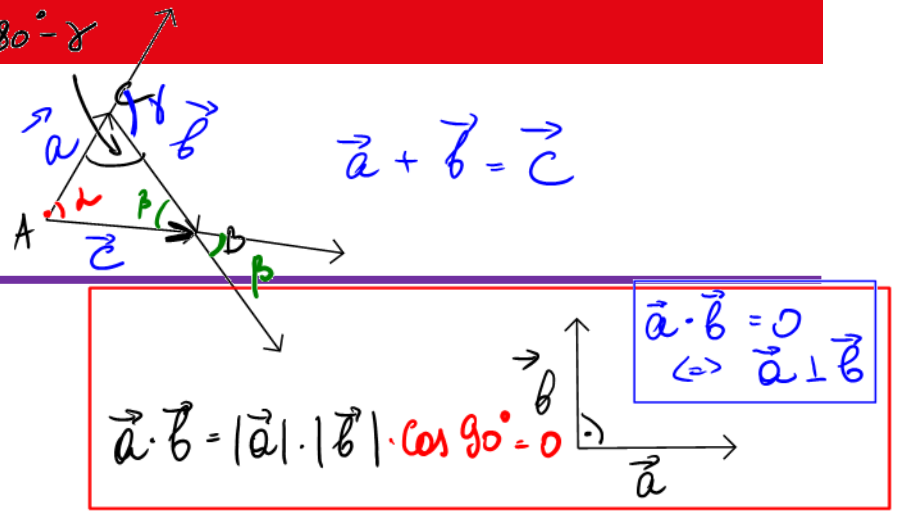
Andere Bezeichnung für Betrag
„Norm eines Vektors“:

$\|\vec{x}\|$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt



- **Skalarprodukt (inneres Produkt):**
  - Multiplikation zweier Vektoren

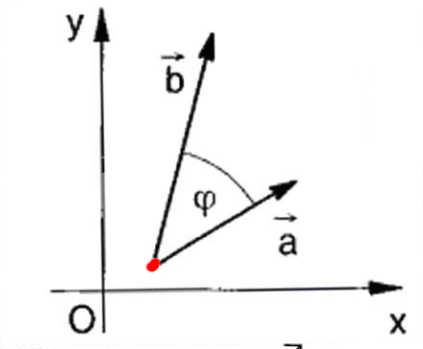
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

  - Das Ergebnis ist ein Skalar (reelle Zahl), **kein Vektor**!
    Vektor „mal“ Vektor = Skalar

Skalarprodukte zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: (2) (1)

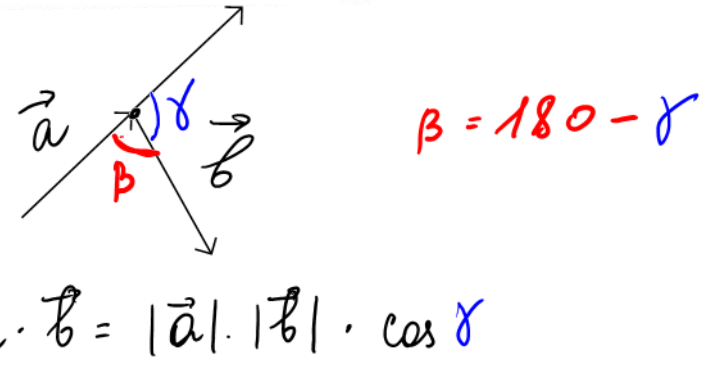
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi = a_x b_x + a_y b_y$$

Wobei ϕ der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel $0° \leq \phi \leq 180°$ ist.



  - **Bemerkung**: φ ist der kleinere der beiden Winkel, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bei **gleichem Fußpunkt** miteinander bilden.
  - **Anwendung**: Arbeit in der Mechanik ist Skalarprodukt von Kraft und Weg.
  - Aus der Formel ergibt sich die Berechnung vom Winkel:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$ (1) (2)



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt

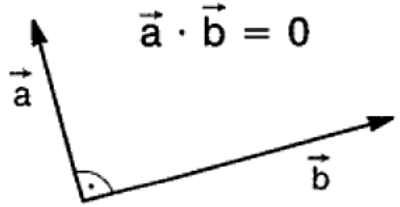
- **Skalarprodukt - Spezialfälle:**

  Rechter Winkel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = 0$

  Paralelle Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

  Entgegengesetzte Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -a \cdot b \Rightarrow \cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

  Gleiche Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 0° = a^2$



- **Rechengesetze**

  Assoziatives Gesetz: Ist ungültig: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

  Kommutatives Gesetz: Ist gültig: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ✓

  Distributives Gesetz: Ist gültig: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ✓

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt

- **Skalarprodukt - Beispiele:**

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ -1 \end{pmatrix}$; berechne b_x so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -6 + 8 = 2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

$2 b_x + 4 \cdot (-1) = 0$

$2 b_x - 4 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b_x - 2 = 0 \quad | + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_x = 2}$

Lösung

Zu **a)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 2.$

Zu **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot b_x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_x = 2.}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

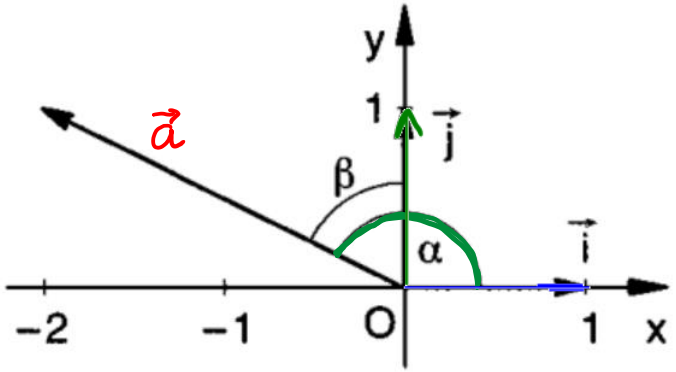
13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

- **Skalarprodukt – Winkel zwischen zwei Vektoren:**

Welche Winkel schließt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den beiden Koordinatenachsen ein?



Lösung:

Die gesuchten Winkel α und β sind gerade die Winkel, die der Vektor $\vec{a}$ mit $\vec{i}$ bzw. $\vec{j}$ einschließt.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot 1} = \frac{-2\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot 1} = \frac{-2\cdot 0 + 1\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 153{,}4°, \qquad \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}4°.$$

$\vec{e}_x = \vec{e}_1 = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{i}| = \sqrt{1^2+0} = 1$

„Einheitsvektor Richtung x-Achse"

$\vec{e}_y = \vec{e}_2 = \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{j}| = 1$ „–"– y-Achse"

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

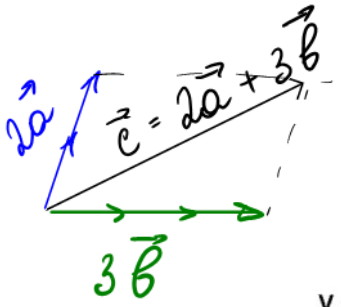
Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

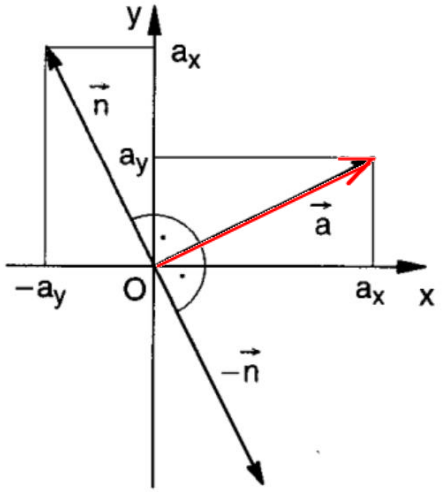
- **Kollineare Vektoren** (Parallel, anti-parallel oder auf gleicher Gerade)
  - Algebraisch ausgedrückt: **linear abhängig** ($\vec{b} = \lambda\vec{a}$)
- **Komplanare Vektoren –** Vektoren, welche alle auf der gleichen Fläche liegen.
  - Algebraisch ausgedrückt: **lineare Kombination** ($\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$) $\mathbb{R}^3$
- **Inverser Vektor** (Gegenvektor) zu einem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$:

$$-\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$

- **Normalvektor** (Normalenvektor) $\vec{n}$ zu einem Vektor $\vec{a}$ – ein Vektor, der orthogonal (d. h. rechtwinklig, senkrecht) auf dem Vektor $\vec{a}$ steht ($\vec{n} \perp \vec{a}$) und gleiche Länge wie Vektor $\vec{a}$ hat .
  - Es gibt zwei Normalvektoren zu einem Vektor $\vec{a}$ (in $\mathbb{R}^2$)
  - $\vec{n}$ und $-\vec{n}$ erhält man durch Vertauschen der Koordinaten von $\vec{a}$ und Wechsel des Vorzeichens bei einer der beiden Koordinaten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \text{ und } -\vec{n} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$$





Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

- **Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ (normierter Vektor) –** Vektor mit der Länge 1: $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

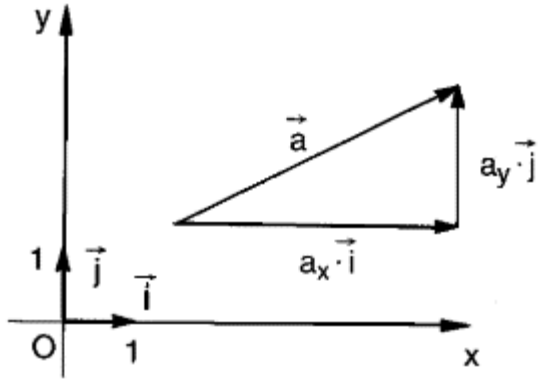
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

- **Komponentendarstellung eines Vektors in $\mathbb{R}^2$**
  - **Einheitsvektoren in Richtung Koordinatenachsen**:

$\vec{\imath} = \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung x-Achse

$\vec{\jmath} = \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Richtung y-Achse



  - Jeder Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ kann in Richtung der beiden Koordinatenachsen zerlegt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} = a_x \cdot \vec{e}_1 + a_y \cdot \vec{e}_2$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{2 \cdot \vec{e}_x}_{\text{Vektorkomponente}} + \underbrace{5 \cdot \vec{e}_y}_{\text{Vektorkomponente}}$

  - **Vektorkomponenten**: $a_x \cdot \vec{\imath}$ und $a_y \cdot \vec{\jmath}$
  - **Vektorkoordinaten** (**skalare Komponenten**): a_x und a_y

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

- **Einheitsvektoren als Richtungsvektoren (normierter Vektor)**
  - Vektoren werden oft verwendet, um Richtungen anzugeben.
  - Dabei ist der Betrag eines solchen Richtungsvektors meist ohne Bedeutung.
  - Fallweise ist das aber günstig, statt des Vektors $\vec{a}$ den entsprechenden Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ zu verwenden.
  - Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen $\vec{a}$ und $\overrightarrow{a_0}$ her:

Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so gilt für den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Beispiel:

a) Wie lauten die Koordinaten des Einheitsvektors $\overrightarrow{a_0}$ von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Lösung: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 0{,}45 \end{pmatrix}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

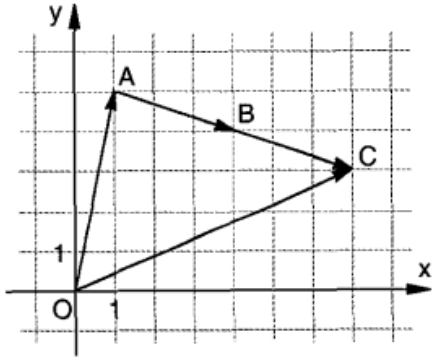
Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so gilt für den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Beispiel:

b) Gegeben ist die Strecke AB durch $A(1|5)$ und $B(4|4)$. Verdoppeln Sie die Länge der Strecke AB über B hinaus. Wie lauten die Koordinaten des Endpunktes C?

Lösung: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \Rightarrow C(7|3)$



c) Verlängern Sie die Strecke AB über B hinaus um 4 Längeneinheiten. Wie lauten nun die Koordinaten des Endpunktes D?

Wir müssen von B aus das Vierfache des Einheitsvektors von $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4-1\\4-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ abtragen.

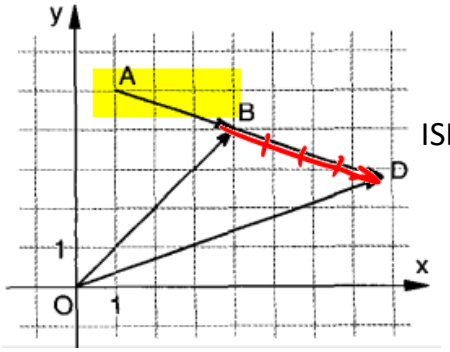
Der Einheitsvektor von $\overrightarrow{AB}$ ist wegen: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ der Vektor $\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

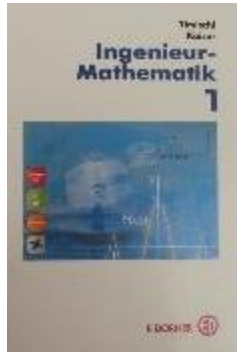
$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$\overrightarrow{BD} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Damit: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}7{,}8\\2{,}7\end{pmatrix}$

→ Also $D(7{,}8|2{,}7)$





ISBN: 9783705501553

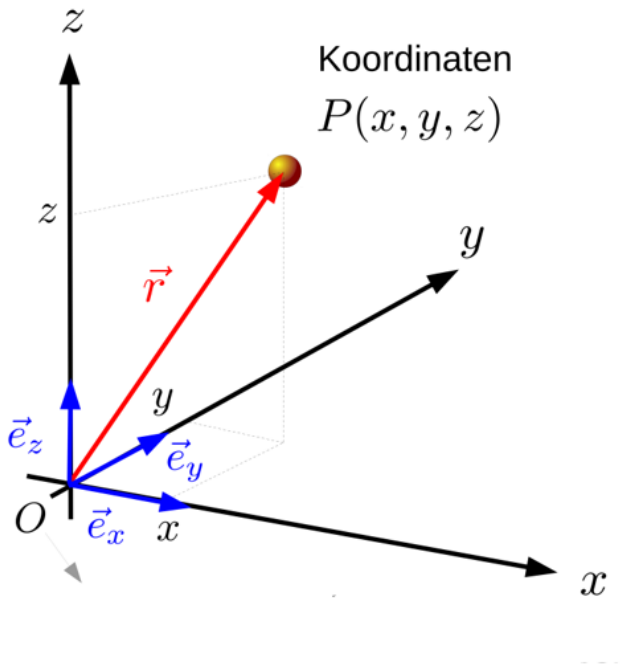
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Vektoren im Koordinatensystem

Ortsvektor:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\ \vec{e}_x + y\ \vec{e}_y + z\ \vec{e}_z$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

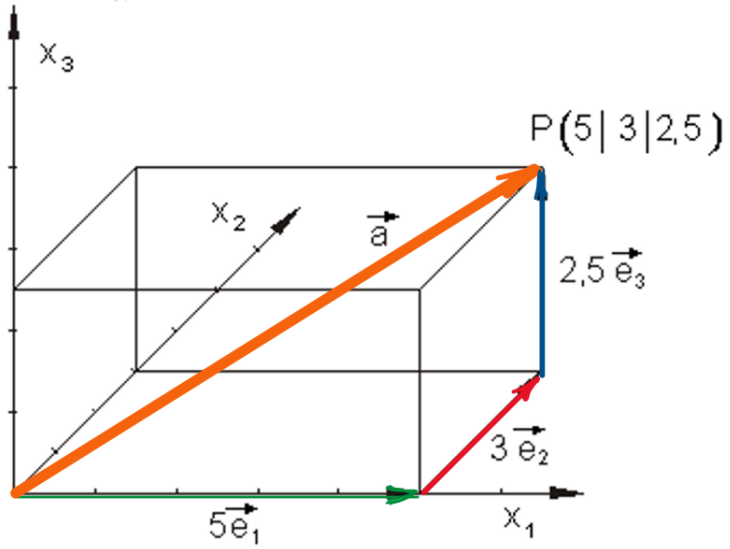
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

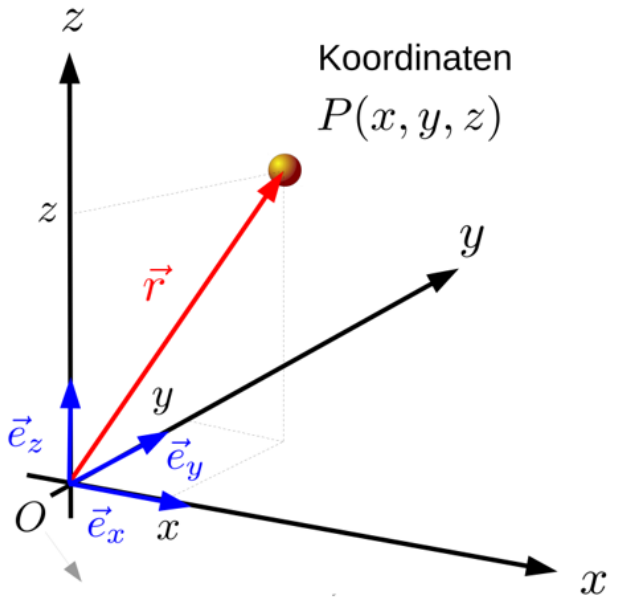
13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Vektoren im Koordinatensystem

Ortsvektor:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\ \vec{e}_x + y\ \vec{e}_y + z\ \vec{e}_z$$





$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 2{,}5\ \vec{e}_3$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Alle Rechengesetze für Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) gelten auch für Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$):

1. Addition:

   Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden komponentenweise addiert:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + a_3 \end{pmatrix}$$

2. Subtraktion:

   Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden komponentenweise subtrahiert:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Alle Rechengesetze für Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) gelten auch für Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$):

3. Multiplikation eines Vektors mir einem Skalar λ:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

4. Betrag $\|\vec{v}\|$ eines Vektors:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Alle Rechengesetze für Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) gelten auch für Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$):

5. Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (1)$$

$$= \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\alpha \quad (2)$$

6. Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}\right)$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Speziell im Raum ($\mathbb{R}^3$) !!!

7. Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Kreuzprodukt

- Das **Kreuzprodukt** (oder Vektorprodukt oder Äußeres Produkt) ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.
- Kreuzprodukt ≠ Skalarprodukt
- Kreuzprodukt: Vektor „mal“ Vektor = Vektor
- Skalarprodukt: Vektor „mal“ Vektor = Skalar

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt der Vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

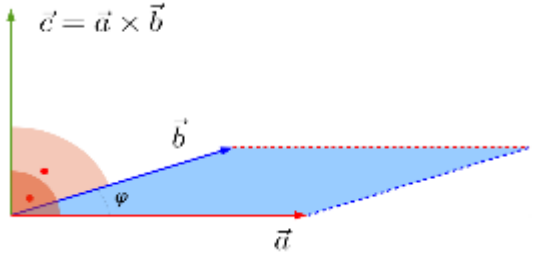
Kreuzprodukt oder **Vektorprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Kreuzprodukt

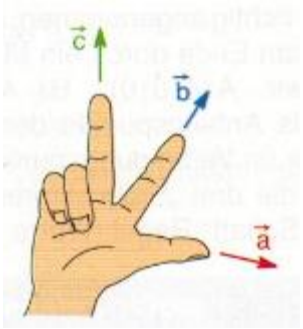
Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert einen Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften.



1. $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \text{ und } \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein "rechte Hand-System"



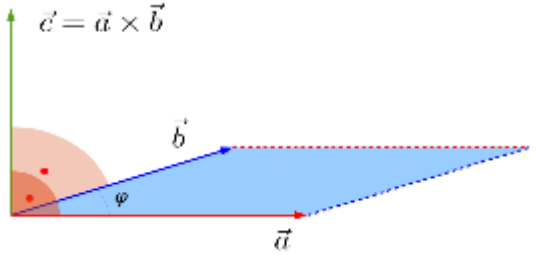
$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Kreuzprodukt

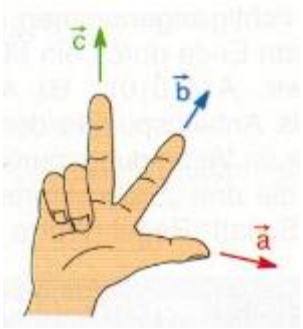
Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert einen Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften.



1. $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \text{ und } \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

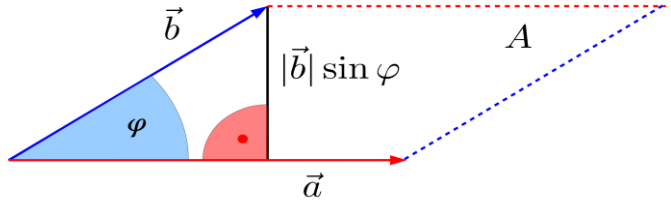
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein "rechte Hand-System"



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, wobei φ der zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.
   Das entspricht gerade der **Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms**.

Die Länge des Vektors $\vec{c}$, $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt A des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.



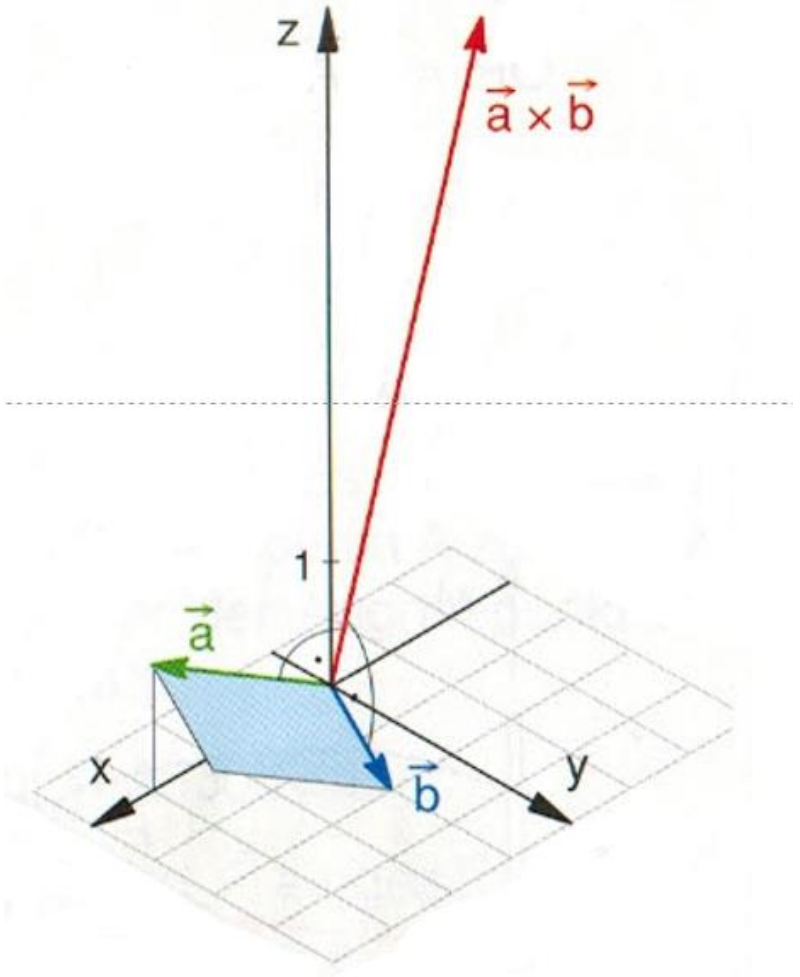
13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

a_1 a_2 a_3 a_1 a_2 — b_1 b_2 b_3 b_1 b_2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} \times \vec{b} = ?$$



13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

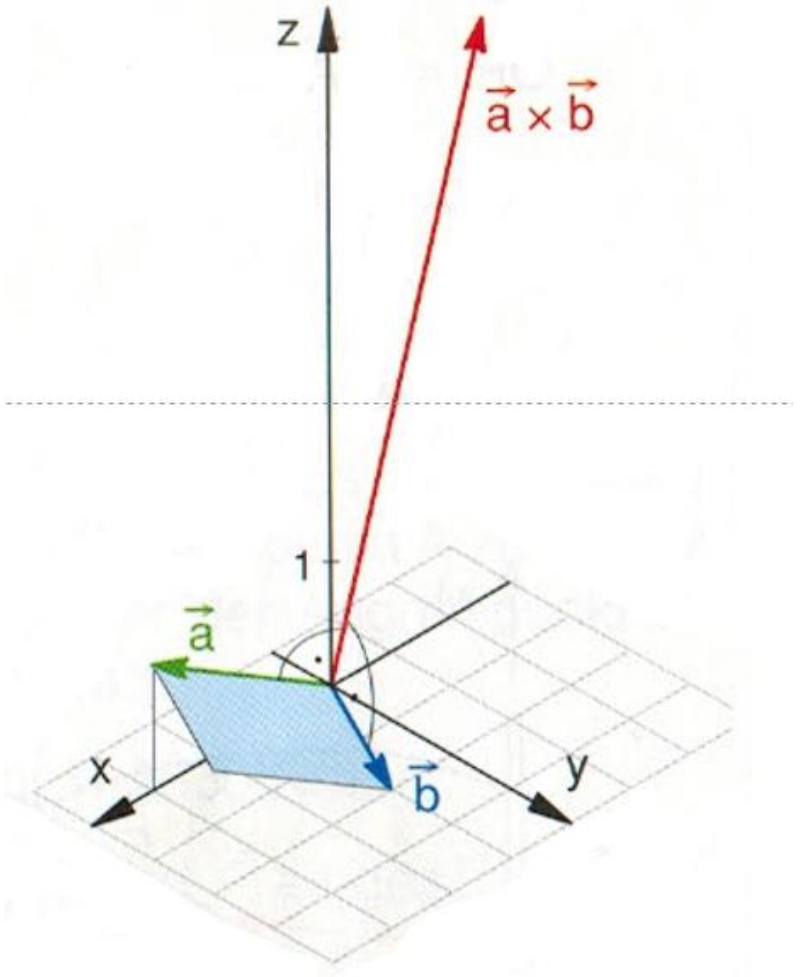
Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} \times \vec{b} = ?$$

Lösung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Spatprodukt

Definition: Spatprodukt

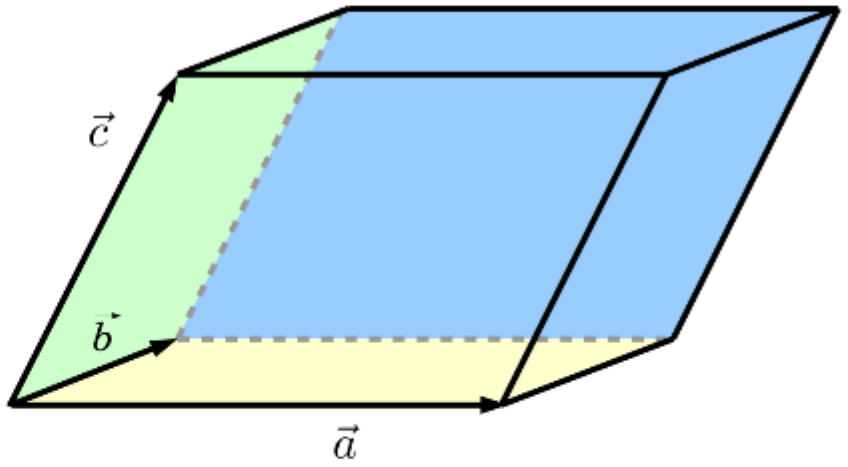
Für drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ist das **Spatprodukt** $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ definiert als

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Geometrisch:

Betrag in $\mathbb{R}$

$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ gibt das Volumen des Spats (oder Parallelepipeds) an, das von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird:



$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **koplanar** (liegen in einer gemeinsamen Ebene)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Spatprodukt

Aufgabe: Einen Spat nennt man einen Körper, der von drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird. Das Volumen V des Spates kann durch die Formel

$$V = | < \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} > |$$

berechnet werden. Berechnen Sie das Volumen des Spates, der von den Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Lösung: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Für das Volumen folgt $V = |0 - 4 - 5| = 9$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

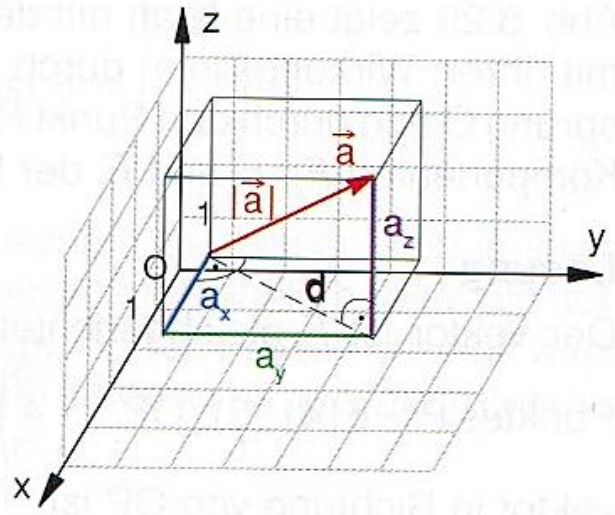
Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

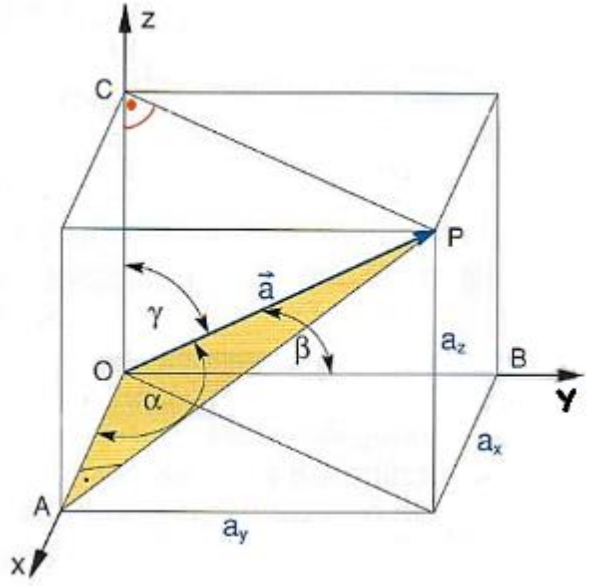
a) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und normieren Sie den Vektor, d.h. bestimmen Sie den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ in Richtung von $\vec{a}$.

b) Der Vektor $\vec{a}$ wird vom Punkt $P(3|2|1)$ abgetragen. Welche Koordinaten besitzt der Endpunkt Q?

c) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ in b)?

d) Bestimmen Sie die Winkel, welche der Vektor $\vec{a}$ in a) mit den drei positiven Koordinatenachsen einschließt.





Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

a) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und normieren sie den Vektor, d.h. bestimmen Sie den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ in Richtung von $\vec{a}$.

Lösung:

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

a) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und normieren sie den Vektor, d.h. bestimmen Sie den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ in Richtung von $\vec{a}$.

Lösung:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Damit ist $a = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29} = 5{,}39.$

Der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$ errechnet sich zu $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}743 \\ 0{,}557 \end{pmatrix}$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

b) Der Vektor $\vec{a}$ wird vom Punkt $P(3|2|1)$ abgetragen. Welche Koordinaten besitzt der Endpunkt Q?

Lösung:

Wie bei zweidimensionalen Vektoren gilt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

b) Der Vektor $\vec{a}$ wird vom Punkt $P(3|2|1)$ abgetragen. Welche Koordinaten besitzt der Endpunkt Q?

Lösung:

Wie bei zweidimensionalen Vektoren gilt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$.

c) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ in b)?

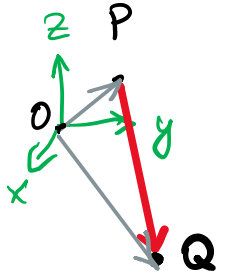
Lösung:

Der Winkel berechnet sich wie bei zweidimensionalen Vektoren mithilfe des Skalarprodukts. Die **Koordinatenform des Skalarprodukts** lautet nun:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77}$;

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{31}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} = 0{,}944 \Rightarrow \varphi = \arccos 0{,}944 = 19{,}2°$.



13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

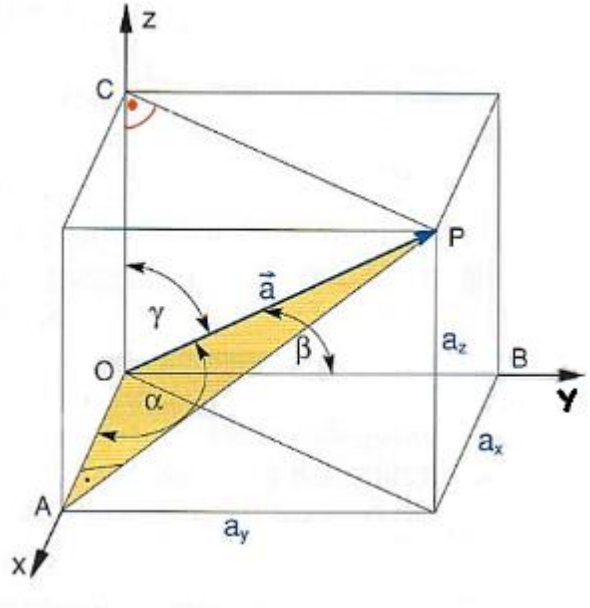
Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

d) Bestimmen Sie die Winkel, welche der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit den drei positiven Koordinatenachsen einschließt.

Lösung: aus Teil a) folgt: $|\vec{a}| = \sqrt{29}$

Bemerkung: Oft sind die drei Winkel α, β, γ eines Vektors $\vec{a}$ zu den *positiven* Koordinatenachsen gegeben, so folgt für die Koordinaten (skalaren Komponenten):

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$$
$$a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$$
$$a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern