Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

11. Ungleichungen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative
Hochschule
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Äquivalente Umformungen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Ungleichungen liegen vor, wenn man zwei Rechenausdrücke (Terme) durch eines der Relationszeichen $<, >, \leq$ oder $\geq$ miteinander verbindet.

Ähnlich wie Gleichungen lassen sich Ungleichungen in vielen Fällen durch **äquivalente Umformungen** lösen:

1. Zu **beiden Seiten** der Ungleichung dürfen beliebige Terme **addiert** oder **subtrahiert** werden.
2. Eine Ungleichung darf mit einem **beliebigen positiven Term multipliziert** bzw. durch diesen dividiert werden.
3. Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen **negativen Term** multipliziert bzw. durch diesen dividiert werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen umgedreht wird.
4. Die **beiden Seiten** einer Ungleichung dürfen miteinander **vertauscht** werden, wenn gleichzeitig das **Relationszeichen umgedreht** wird.

→ Die Lösungsmengen von Ungleichungen sind in der Regel Intervalle.

Graphische Lösungsmethode

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

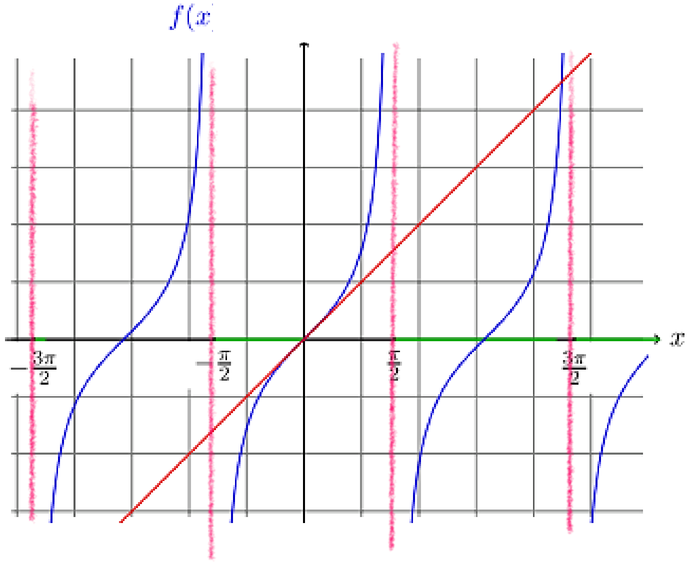
Graphische Lösung

Jede Ungleichung kann man auf die Form $f(x) > 0$ bzw. $f(x) \geq 0$ bringen.

Die Lösungsmenge der Ungleichung sind dann alle Intervalle der reellen Zahlen, in denen der Graph der Funktion $f(x)$ oberhalb der x-Achse verläuft. Dazu kann man z.B. die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse bestimmen, d.h. die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$, und dann für die dazwischen liegenden Intervalle prüfen, ob der Graph für dieses Intervall jeweils oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft.

Gegeben ist folgende Ungleichung:

$$\tan x < x$$



Betrachte die Graphen von $\tan x$ und x. Diejenigen Bereiche der x-Achse, die die Ungleichung erfüllen, zählen zur Lösungsmenge (hier grün markiert).

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Lineare Ungleichungen – mit einem Parameter – Fallunterschied

Welche x erfüllen folgende Ungleichung:

$$ax + \frac{2}{3} \geq -\frac{1}{7}?$$

Dabei ist a eine beliebige, feste Zahl.
Wir formen um:

$$ax + \frac{2}{3} \geq -\frac{1}{7} \quad \Big| -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad ax \geq -\frac{1}{7} - \frac{2}{3} \quad \Big| \cdot \frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

Fall 1: $a > 0$

$$x \geq -\frac{17}{21} \cdot \frac{1}{a}$$

Fall 2: $a < 0$

$$x \leq -\frac{17}{21} \cdot \frac{1}{a}$$

Fall 3: $a = 0 \Rightarrow 0 \cdot x \geq -\frac{17}{21}$ immer wahr! $x \in \mathbb{R}$

Beispiele

Lineare Ungleichungen - Bruch

Welche x erfüllen die Ungleichung

$$\frac{2x-3}{x-3} \geq 4?$$

$|\cdot(x-3)$ positiv ? negativ ?

Die Zahl $x = 3$ muss von vorne herein ausgeschlossen werden, weil sonst auf der linken Seite durch Null dividiert wird. Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) $x < 3$ bzw. $x - 3 < 0$ und

(2) $x > 3$ bzw. $x - 3 > 0$.

Wir haben also zwei Probleme. Wir suchen Lösungen der Ungleichungen im Fall (1) und im Fall (2).

(1) Multiplikation der Ungleichung mit $x - 3 < 0$ ergibt (Relation wird umgekehrt):

$$\frac{2x-3}{x-3} \geq 4 \;\Big|\cdot(x-3) \Rightarrow 2x-3 \leq 4(x-3) \Leftrightarrow 2x-3 \leq 4x-12 \;\Big|-2x+12 \Leftrightarrow 9 \leq 2x \Rightarrow x \geq \frac{9}{2}$$

4,5

↯

(2) Multiplikation der Ungleichung mit $x - 3 > 0$ ergibt (Relation bleibt erhalten):

$$\frac{2x-3}{x-3} \geq 4 \;\Big|\cdot(x-3) \Rightarrow 2x-3 \geq 4(x-3) \Leftrightarrow 2x-3 \geq 4x-12 \;\Big|-2x+12 \Leftrightarrow 9 \geq 2x \Rightarrow x \leq 4{,}5$$

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 4{,}5\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

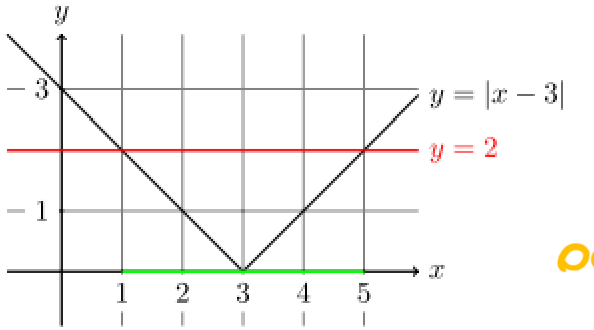
Beispiele

Lineare Ungleichungen - Betragsungleichungen

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{falls } x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad (1) \\ -(x-3), & \text{falls } x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \quad (2) \end{cases}$$

oder

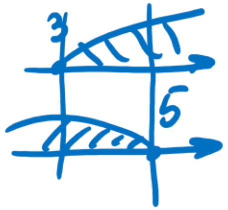
$|x-3| \leq 2$



Wir betrachten eine Ungleichung mit einer Betragsfunktion und wenden auch hier eine Fallunterscheidung an:

(1) $x \geq 3$ und

$x - 3 \leq 2 \Rightarrow x \leq 5$



$3 \leq x \leq 5$

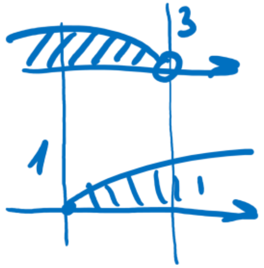
oder

(2) $x < 3$ und

$-(x-3) \leq 2$

$-x + 3 \leq 2$

$x \geq 1$



$1 \leq x < 3$

(1) $y = x - 3$

(2) $y = -x + 3$

oder

$\cup$ $\vee$

und

$\cap$ $\wedge$

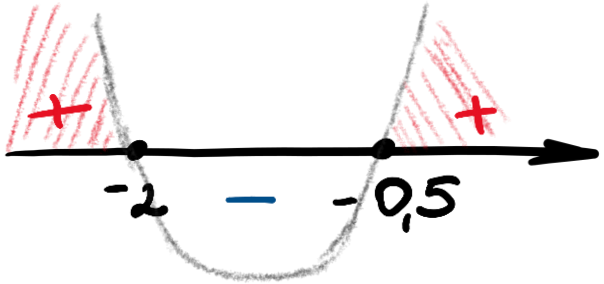
$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [1,5]\}$

Beispiele

Quadratische Ungleichungen

a) Lösen Sie folgende Ungleichung:

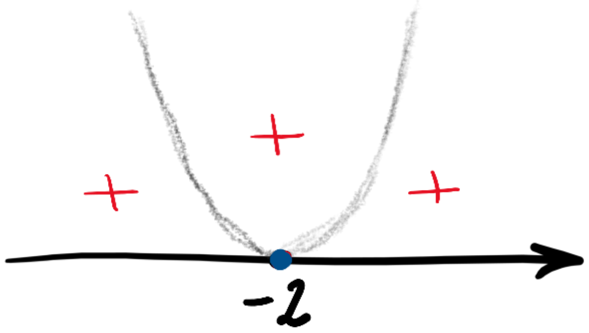
$$2x^2 + 5x + 2 > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + 2{,}5x + 1\right) > 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2{,}5x + 1 > 0$$
$$x_1 = -2 \wedge x_2 = -0{,}5$$
$$\Rightarrow (x+2)(x+0{,}5) > 0$$



$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \vee x \geq -0{,}5\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -2] \cup [-0{,}5, +\infty)\}$$

b) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$-x^2 - 4x - 4 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow x = -2$$



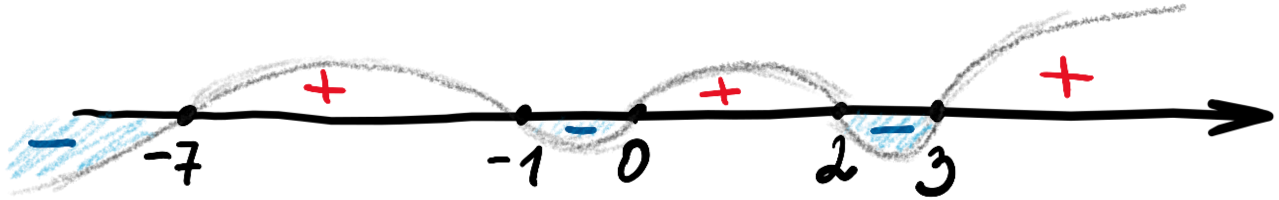
$$\mathbb{L} = \{-2\}$$

Beispiele

Ungleichungen n-ten Grades

a) Lösen Sie folgende Ungleichung:

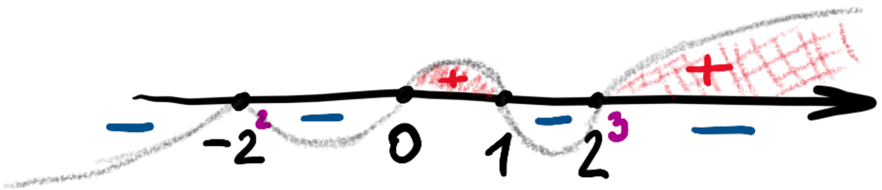
$$(x+7)(x-3)(x+1)(x-2)x \leq 0$$



$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty,-7] \cup [-1,0] \cup [2,3]\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \lor -1 \leq x \leq 0 \lor 2 \leq x \leq 3\}$$

b) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$x(2+x)^2(x-1)(x-2)^3 \geq 0$$



$$L = \{x \in \mathbb{R} | x = -2 \lor 0 \leq x \leq 1 \lor x \geq 2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | x \in \{-2\} \cup [0,1] \cup [\cancel{1}\,2, +\infty)\}$$