



Fachhochschule Flensburg

Vorkurs Mathematik

Skript zur Vorbereitung auf das Studium

Valentina Kluge, Franka Seeger

16. Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Rechengesetze	1
1.1	Bezeichnungen	1
1.2	Körperaxiome und Rechenregeln	2
1.3	Brüche	4
1.4	Binomische Formeln	5
2	Elementare Gleichungen	7
3	Anordnung und Betrag	9
4	Potenzen	11
4.1	Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	11
4.2	Potenzen mit rationalen Exponenten und allgemeine Wurzeln	12
4.2.1	Quadratwurzeln	12
4.2.2	Rationalisieren des Nenners	14
4.2.3	Die n -te Wurzel	14
4.2.4	Beliebige rationale Exponenten	14
4.2.5	Elementare Potenzgleichungen	15
5	Quadratische Gleichungen	16
5.1	Reinquadratische Gleichungen $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$	16
5.2	Spezielle quadratische Gleichungen $ax^2 + bx = 0$, $a, b \neq 0$	16
5.3	Allgemeine quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \neq 0$ $x \in \mathbb{R}$	17
6	Wurzelgleichungen	19
7	Gleichungen n-ten Grades	21
8	Logarithmen	23
9	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	26
9.1	LGS mit zwei Unbekannten	26
9.1.1	Die Einsetzungsmethode	27
9.1.2	Die Gleichsetzungsmethode	28
9.1.3	Die Additionsmethode	29
9.1.4	LGS mit drei Unbekannten	31
10	Ungleichungen	32

11 Funktionen	33
11.1 Lineare Funktionen (Geraden)	33
11.1.1 Zugehörigkeit eines Punktes	33
11.1.2 Bestimmung der Funktionsgleichung	34
11.2 Quadratische Funktionen (Parabeln)	35
11.2.1 Schnittpunkte von Parabel und Geraden	35
11.3 Ganzrationale Funktionen	36
11.4 Gebrochenrationale Funktionen	37
11.5 Die Exponentialfunktion	38
11.6 Die Logarithmusfunktion	40
11.7 Trigonometrische Funktionen	41
11.7.1 Definition am rechtwinkligen Dreieck	41
11.7.2 Definition am Einheitskreis	41
11.7.3 Wichtige Zusammenhänge	43
12 Vektoren	44
12.1 Rechnen mit Vektoren	45
13 Elementare Geometrie	48
13.1 Flächeninhalte	48
13.2 Sinussatz	48
13.3 Kosinussatz	48
13.4 Strahlensätze	49
13.5 Sätze über das rechtwinklige Dreieck	50
13.5.1 Satz des Thales	50
13.5.2 Satz des Pythagoras	50
13.5.3 Höhensatz	50
13.5.4 Kathetensatz	50
14 Differentialrechnung	52
14.1 Ableitungsregeln	52
14.2 Kurvendiskussion	54
14.2.1 Lokale Extremwerte	54
14.2.2 Krümmung / Wendepunkte	54
15 Integralrechnung	55
15.1 Integrationsregeln	55
15.2 Einige wichtige Grundintegrale	56

1 Rechengesetze

1.1 Bezeichnungen

Herzstück der Mathematik sind die Zahlen, deshalb sollen einführend ein paar Worte über die verschiedenen Zahlenräume verloren werden.

Natürliche Zahlen und ganze Zahlen

$\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge aller natürlichen Zahlen. Dabei gehört nach DIN 5473 die Null zu den natürlichen Zahlen. Addition und Multiplikation sind in der Menge $\mathbb{N}$ unbeschränkt durchführbar.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Da die Null in der Mathematik oft eine besondere Rolle spielt, soll folgend $\mathbb{N}^+$ die Menge aller positiven natürlichen Zahlen sein, also die Menge aller natürlichen Zahlen ohne Null.

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge aller ganzen Zahlen. Addition, Subtraktion und Multiplikation sind in der Menge $\mathbb{Z}$ unbeschränkt durchführbar.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Rationale und reelle Zahlen

$\mathbb{Q}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen. Damit enthält sie alle endlichen und unendlichen periodischen Dezimalbrüche. Anders ausgedrückt umfassen die rationalen Zahlen alle Zahlen, die sich als Verhältnis (Bruch) zweier ganzer Zahlen darstellen lassen. Dabei ist die Null als im Nenner stehende

Zahl nicht zugelassen.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Erweitert man die rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen, also alle unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche, erhält man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Menge $\mathbb{R}$ enthält somit alle Zahlen, die auf der Zahlengeraden zu finden sind. Ist eine Zahl x ein Element der reellen Zahlen schreibt man $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Körperaxiome und Rechenregeln

Die folgenden Gesetze werden als Körperaxiome bezeichnet, daraus leiten sich die Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ab.

Addition

$a + b = b + a$	Kommutativgesetz (KG)
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz (AG)
$a + 0 = a$	Neutrales Element (NE)
$a + (-a) = 0$	Inverses Element (IE)

Multiplikation

$a \cdot b = b \cdot a$	(KG)
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(AG)
$a \cdot 1 = a$	(NE)
$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	(IE)

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Die Reihenfolge der Berechnung wird durch Klammern vorgeschrieben. Punktrechnung gilt vor Strichrechnung.

Bemerkung 1.1 $a \cdot b = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass einer der folgenden drei Fälle eintritt:

$$1. \ a = 0 \text{ und } b \neq 0$$

$$2. \ b = 0 \text{ und } a \neq 0$$

$$3. \ a = 0 \text{ und } b = 0$$

Damit ein Produkt gleich Null ist, muss mindestens einer der Faktoren gleich Null sein.

Beispiel 1.1 Für welches a gilt $(a - 1)^2 \cdot a^3 = 0$? Es muss gelten $(a - 1)^2 = 0$ oder $a^3 = 0$. Die beiden möglichen Lösungen sind also

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 0$$

Aus den Körperaxiomen leiten sich folgende Vorzeichenregeln ab:

$$-(-a) = a$$

$$-(a + b) = -a - b$$

$$(-a) \cdot b = -a \cdot b$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a} \text{ für } a \neq 0$$

Beispiel 1.2 1. $-(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$

2. $-(2 + 5) = -2 - 5 = -7$

3. $(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Mit diesen Regeln können wir nun einfache Klammern auflösen, Klammern setzen und Terme umformen.

Beispiel 1.3 Man löse die Klammern auf und fasse zusammen:

$$\begin{aligned} 7a - 3b + (-a + 3c)(-4) &= 7a - 3b + 4a - 12c \\ &= 7a + 4a - 3b - 12c \\ &= (7 + 4)a - 3b - 12c \\ &= 11a - 3b - 12c \end{aligned}$$

1.3 Brüche

Aus den Axiomen leiten sich auch Regeln für das Rechnen mit Brüchen ab. Addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert man zwei Brüche, entsteht ein neuer Bruch.

Dies ist nicht zu verwechseln mit dem Erweitern oder Kürzen von Brüchen, denn dadurch wird ein Bruch nur anders dargestellt, er behält seinen Wert bei.

Erweitern: Beim Erweitern werden Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multipliziert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \text{ mit } b, k \neq 0$$

Kürzen: Kürzen ist die Umkehr des Erweiterns. Lassen sich Zähler und Nenner eines Bruches als Produkt ausdrücken und beide Produkte enthalten denselben Faktor, darf durch diesen Faktor dividiert werden.

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b} \text{ mit } b, k \neq 0$$

Bemerkung 1.2 *Gekürzt wird nur aus einem Produkt. Merke: Aus Summen kürzen nur die Dummen!*

$$\frac{a+k}{b+k} \neq \frac{a}{b}$$

Rechenregeln

Addition und Subtraktion: Brüche können nur addiert/subtrahiert werden, wenn sie denselben Nenner besitzen. Ist dies nicht von vornerein der Fall, müssen die Brüche zunächst durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} &= \frac{a \pm c}{b} \\ \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \end{aligned}$$

Multiplikation und Division: Bei der Multiplikation zweier Brüche werden jeweils Zähler und Nenner miteinander multipliziert.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \\ a \cdot \frac{b}{c} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \end{aligned}$$

Die Division durch einen Bruch ist das selbe wie die Multiplikation mit seinem Kehrwert.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Beispiel 1.4 1. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$

2. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{11}{15}$

3. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

4. $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

In Zähler und Nenner von Brüchen können neben reellen Zahlen auch Brüche oder Terme stehen.

Beispiel 1.5 1. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{3b^3}{a^2} - \frac{4c}{a^2} = \frac{3b^3 - 4c}{a^2}$

3. $\frac{\frac{a+1}{2}}{\frac{a+1}{3}} = \frac{a+1}{2} : \frac{a+1}{3} = \frac{a+1}{2} \cdot \frac{3}{a+1} = \frac{(a+1) \cdot 3}{2 \cdot (a+1)} = \frac{3}{2}$

1.4 Binomische Formeln

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Dabei stehen die Symbole a und b für beliebige Zahlen.

Beispiel 1.6 Klammern Sie aus:

$$\begin{aligned} (-3x^2 + 7a)^2 &= (-3x^2)^2 + 2 \cdot (-3x^2) \cdot 7a + (7a)^2 \\ &= 9x^4 - 42x^2a + 49a^2 \end{aligned}$$

Mithilfe der binomischen Formeln lassen sich nicht nur Rechenschritte einsparen, sie sind auch eine Hilfe beim Quadrieren von Zahlen.

Beispiel 1.7

$$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$$

$$1,01^2 = (1 + 0,01)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,01 + 0,01^2 = 1 + 0,02 + 0,0001 = 1,0201$$

Rückwärts angewandt lassen sich mit den binomischen Formeln Terme vereinfachen.

Beispiel 1.8 Vereinfachen Sie folgenden Term:

$$\begin{aligned} \frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4} &= \frac{(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2}{2(3x - 2)} = \frac{(3x - 2)^2}{2(3x - 2)} \\ &= \frac{3x - 2}{2} = \frac{3x}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3x}{2} - 1 \end{aligned}$$

2 Elementare Gleichungen

Definition 2.1 Eine Gleichung, in der die Unbekannte (z.B. x, y, z) nur mit Zahlen multipliziert und addiert wird, und nicht mit sich selbst heißt lineare Gleichung mit einer Unbekannten.

Die Lösungsmenge einer Gleichung bleibt unverändert, wenn folgende Rechenoperationen durchgeführt werden:

1. Addition der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung
2. Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit einer Zahl ungleich Null

Man spricht hierbei auch von *äquivalenten Umformungen*.

Für eine umgeformte Gleichung der Art $a \cdot x = b$ gibt folgende drei Lösungsmöglichkeiten:

1. $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ ist die einzige Lösung.
2. $a = 0; b \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x = b \neq 0$, d.h. es gibt keine Lösung.
3. $a = 0; b = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen.

Beispiel 2.1

$$\begin{aligned} & 5(4x - 2) = 20x - 2 \\ \Leftrightarrow & 20x - 10 = 20x - 2 \\ \Leftrightarrow & 20x = 20x + 8 \\ \Leftrightarrow & 0 = 8 \\ \Rightarrow & \mathbb{L} = \{\} \end{aligned}$$

Beispiel 2.2

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x+2} \\ \Leftrightarrow & \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+5}{x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-1)(x+2) - (x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 + 2x - x - 2 - (x^2 - 2x + 5x - 10)}{x^2 - 4} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-2x + 8}{x^2 - 4} = 0 \\ \Rightarrow & -2x + 8 = 0 \text{ und } x^2 - 4 \neq 0 \\ \Rightarrow & x = 4 \text{ und } x \neq \pm 2 \\ \Rightarrow & \mathbb{L} = \{4\} \end{aligned}$$

Beispiel 2.3

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(6x-4) + 8 = 2x + \frac{20}{3} \\ \Leftrightarrow & 6x - 4 + 24 = 3 \left(2x + \frac{20}{3} \right) \\ \Leftrightarrow & 6x + 20 = 6x + 20 \\ \Leftrightarrow & x = x \\ \Rightarrow & \mathbb{L} = \mathbb{R} \text{ (} x \text{ ist beliebig)} \end{aligned}$$

3 Anordnung und Betrag

Für zwei Zahlen a und b trifft genau eine der folgenden Möglichkeiten zu:

- ▶ $a < b$ „ a ist kleiner als b “,
- ▶ $a > b$ „ a ist größer als b “
- ▶ oder $a = b$ „ a ist gleich b “.

Gesetze

1. $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivgesetz)
2. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
3. $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow ac < bc$, falls $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
4. $a < b \Leftrightarrow b > a$

Bemerkung 3.1 Wir schreiben $a \geq b$ („größer oder gleich“), wenn gilt $a > b$ oder $a = b$.

Beispiel 3.1 Welche x erfüllen die folgende Ungleichung?

$$\begin{aligned} & -3x + 1 < 2 \\ \Leftrightarrow & -3x < 1 \\ \Leftrightarrow & x > -\frac{1}{3} \\ \mathbb{L} = & \left(x \mid x > -\frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Definition 3.1 Für den Betrag einer Zahl a gilt folgendes:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag $|a|$ gibt den Abstand von a zum Nullpunkt an. Der Betrag $|a - b|$ gibt den Abstand von a zu b an.

Eigenschaften des Betrags

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 3.2 Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$ besteht aus allen Zahlen, die von Eins höchstens die Entfernung Drei besitzen. Sie entspricht dem abgeschlossenen Intervall $[1 - 3; 1 + 3]$, d.h. $[-2, 4]$.

Ein Intervall besteht aus allen Zahlen, die zwischen den im Intervall angegebenen Grenzen liegen. Je nach Art der Klammern gehören die Grenzen dazu oder nicht. Für $a < b$ existieren folgende Intervalle:

- abgeschlossen: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- offen: $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- links halboffen: $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- rechts halboffen: $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

4 Potenzen

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$\begin{aligned}3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \\(-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}\end{aligned}$$

Allgemein schreibt man Mehrfachprodukte als Potenzen.

Definition 4.1 Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die n -te Potenz a^n (sprich „ a hoch n “) der Zahl a das n -fache Produkt der Zahl a mit sich selbst. a heißt Basis und n Exponent.

Für $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Sonderfälle: $a^0 = 1$, $0^n = 0$, $1^n = 1$

Potenzgesetze

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq b$

1. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert indem man die Exponenten addiert.

$$\begin{aligned}a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}\end{aligned}$$

2. Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert indem man die Basen multipliziert.

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

3. Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiel 4.1 1. $3^3 \cdot 3^2 = 3^5 = 243$; $\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^{4-(-2)} = 3^{4+2} = 3^6$

2. $(-5)^4 = (-1)^4 \cdot 5^4 = 625$, $\frac{3^6}{(\frac{1}{3})^6} = \left(\frac{3}{\frac{1}{3}}\right)^6 = 9^6$

3. $2^8 = (2^4)^2 = \left((2^2)^2\right)^2 = (4^2)^2 = 16^2 = 256$

Beispiel 4.2 Vereinfachen Sie durch Ausklammern:

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^3 &= (1 + 3)a^3 = 4a^3 \\ 2a^4 + 3a^5 &= (2 + 3a)a^4 \\ 5a^7b^2 + 3a^4b^2 - a^5b^3 &= a^4b^2(5a^3 + 3 - ab) \end{aligned}$$

Für die Reihenfolge der Rechenoperationen gilt die folgende „Vorfahrtsregel“:

Hoch vor Punkt vor Strich!

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten und allgemeine Wurzeln

4.2.1 Quadratwurzeln

Definition 4.2 Sei $a \geq 0$, dann heißt $x = \pm\sqrt{a}$ die Quadratwurzel von a , falls $x^2 = a$ ist. a heißt Radikand.

Da das Quadrat x^2 einer reellen Zahl nicht negativ ist, können Quadratwurzeln im Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nur aus Zahlen $a \geq 0$ gezogen werden.

Es gilt z.B. $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{10000} = 100$, $\sqrt{0,04} = 0,2$

Rechenregeln

1. $\sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbb{R}$
2. $(\sqrt{a})^2 = a, (-\sqrt{a})^2 = a, a > 0$
3. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a, b > 0$
4. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a, b > 0$
5. $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}, a > 0$

Beispiel 4.3 Für welche x gilt $x^2 - 9 = 0$?

$$\begin{aligned}
 x^2 - 9 &= 0 \\
 x^2 &= 9 \\
 \sqrt{x^2} &= \sqrt{9} \\
 |x| &= 3 \\
 \Rightarrow x_1 &= 3 \\
 x_2 &= -3
 \end{aligned}$$

Beispiel 4.4 1. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$$2. \sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{16}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$3. 13\sqrt{a} + 7\sqrt{a} = 20\sqrt{a}, a > 0$$

Bemerkung 4.1 Steht unter der Wurzel ein Produkt, kann jeder Faktor für sich radiziert werden ($\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$). Steht unter der Wurzel eine Summe, ist dies nicht(!) erlaubt ($\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$)!

Beispiel 4.5 1. $\sqrt{196x + 196y} = \sqrt{196(x + y)} = \sqrt{196} \cdot \sqrt{x + y} = 14\sqrt{x + y}$

$$2. \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ (Anmerkung: } \sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64} = 14 \text{)}$$

$$3. (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

4.2.2 Rationalisieren des Nenners

Manchmal ist die Wurzel im Nenner eines Bruches lästig. Durch Erweitern des Bruches lässt sich die Wurzel in eine rationale Zahl umwandeln. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Rationalisieren*.

Beispiel 4.6 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt{15}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{7^2-3^2}} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{4}$

3. für $x > 0$, $x \neq 1$: $\frac{x}{x+\sqrt{x}} = \frac{x(x-\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = \frac{x(x-\sqrt{x})}{x^2-\sqrt{x}^2} = \frac{x(x-\sqrt{x})}{x(x-1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$

4.2.3 Die n -te Wurzel

Definition 4.3 Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$ bezeichnet $x = \sqrt[n]{a}$ die nicht negative Lösung der Gleichung $x^n = a$. Radizieren ist die inverse Operation zum Potenzieren, d.h. die n -te Wurzel ist diejenige Zahl, deren n -te Potenz den Radikanden ergibt.

Spezialfälle: $\sqrt[n]{a} = a$, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$: Kubikwurzel

Potenzen mit geraden Exponenten sind immer nicht negative Zahlen. Aus diesem Grund kann bei gerader Ordnung n die n -te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ nur aus nicht negativen Zahlen $a \geq 0$ gezogen werden. Bei ungeraden Exponenten besitzen b und b^n dasselbe Vorzeichen, daher kann für ein ungerades n die n -te Wurzel auch aus negativen Zahlen gezogen werden, wobei das Ergebnis wieder eine negative Zahl ist (z.B. $\sqrt[3]{-27} = -3$).

Beispiel 4.7 1. $\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

2. $\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 81 = 3^4$

3. $\sqrt[10]{7^{10}} = 7$

Wie bei den Quadratwurzeln gelten folgende Regeln:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4.2.4 Beliebige rationale Exponenten

Die n -te Wurzel aus a lässt sich auch als Potenz der Basis a mit dem rationale Exponenten $\frac{1}{n}$ darstellen.

Definition 4.4 Für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ definiert man

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

und

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Analog zu den Potenzgesetzen gilt:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$

Beispiel 4.8 Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

1. $x^{\frac{13}{3}} = x^{\frac{12}{3} + \frac{1}{3}} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^4 \cdot \sqrt[3]{x}$
2. $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = x^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{5}} = x^{\frac{91}{60}} = \sqrt[60]{x^{91}}$
3. $\frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} = \frac{x \cdot \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[5]{x}} = \frac{x \cdot \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4 \cdot x}} = \frac{x \cdot \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[5]{x}}{x} = \sqrt[5]{x}$

4.2.5 Elementare Potenzgleichungen

Bei ganzzahligen geraden Exponenten n besitzt die Potenzgleichung $x^n = b$ für $b > 0$ im Raum der reellen Zahlen die beiden Lösungen $x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{b}$. Bei ungeraden Exponenten n besitzt die Gleichung $x^n = b$ für $b > 0$ nur die Lösung $x = \sqrt[n]{b}$, während für $b < 0$ $x = -\sqrt[n]{b}$ die einzige Lösung ist.

5 Quadratische Gleichungen

5.1 Reinquadratische Gleichungen $ax^2 + c = 0, a \neq 0$

Die reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ geht durch äquivalente Umformungen über in $x^2 = -\frac{c}{a}$ und ist im reellen Raum nur für $-\frac{c}{a} \geq 0$ lösbar. Für $-\frac{c}{a} > 0$ besitzt sie die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Für $c = 0$ gibt es $x = 0$ als einzige Lösung. Im Fall $-\frac{c}{a} < 0$ liefert die reinquadratische Gleichung keine reelle Lösung.

Beispiel 5.1 1. $4x^2 - 121 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{121}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{121}{4}} = \pm \frac{11}{2}$

2. $\sqrt{2}x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{2}}$

3. $x^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -64 \Rightarrow \text{keine reelle Lösung}$

5.2 Spezielle quadratische Gleichungen $ax^2 + bx = 0, a, b \neq 0$

Die Lösungen der speziellen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx = 0$ ergeben sich durch Ausklammern:

$$x(ax + b) = 0$$

Da ein Produkt immer dann Null ergibt, wenn einer der Faktoren gleich Null ist, ergeben sich hier die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$.

Beispiel 5.2

$$\begin{aligned}
\sqrt{8}x^2 + \sqrt{2}x &= 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{8}x + \sqrt{2}) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \neq 0$

$x \in \mathbb{R}$

Liegt die allgemeine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \neq 0$, gibt es mehrere Wege, die reellen Nullstellen zu berechnen:

1. „Ergänzen auf ein volles Quadrat“ (Quadratischer Ergänzung)
2. „Mitternachtsformel“ oder „abc-Formel“: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, der Radikand $D = b^2 - 4ac$ heißt „Diskriminante“.

Liegt die quadratische Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ vor, lauten die Lösungen nach der sogenannten p, q -Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel 5.3

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \mathbb{L} = \{1; 2\}
\end{aligned}$$

Beispiel 5.4

$$\begin{aligned}x^2 - 2x = 8 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \\&\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)} \\&\quad = 1 \pm \sqrt{1 + 8} \\&\quad = 1 \pm 3 \\&\Rightarrow \mathbb{L} = \{-2; 4\}\end{aligned}$$

Beispiel 5.5

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x = 6 &\Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \mid : 3 \\&\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\&\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)} \\&\quad = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\&\quad = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\&\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1; 2\}\end{aligned}$$

Eine andere schnelle Möglichkeit, die Nullstellen der Normalform zu finden, ist der „Satz von Vieta“:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Durch das Lösen dieses elementaren Gleichungssystems mit zwei Unbekannten, können Sie schnell die Nullstellen ausrechnen, wenn diese existieren (!).

Wenn beide Nullstellen existieren und ganze Zahlen sind, dann können sie aus dem Satz von Vieta leicht „abgelesen“ werden.

6 Wurzelgleichungen

Definition 6.1 Gleichungen mit Wurzel, in deren Radikanden die Unbekannte x vorkommt, heißen Wurzelgleichungen.

Falls nur eine Wurzel der Form $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ auftritt und außerhalb der Wurzel die Unbekannte x nur linear vorkommt, bietet sich folgender Lösungsweg an:

1. Man bringe die Wurzel auf eine Seite.
2. Man quadriere beide Seiten der umgeformten Gleichung.
3. Man Löse die entstehende Gleichung.
4. Man überprüfe, welche der Lösungen die Ausgangsgleichung tatsächlich erfüllt.

Beispiel 6.1 1.

$$\begin{aligned}
 & 14 - \sqrt{x^2 + x - 14} = 2x \\
 \Leftrightarrow & 14 - 2x = \sqrt{x^2 + x - 14} \quad | \quad ()^2 \\
 \Leftrightarrow & (14 - 2x)^2 = x^2 + x - 14 \\
 \Leftrightarrow & 196 - 56x + 4x^2 = x^2 + x - 14 \\
 \Leftrightarrow & 3x^2 - 57x + 210 = 0 \quad | : 3 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 19x + 70 = 0 \\
 \Rightarrow & x_{1,2} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4} - 70} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{19}{2} \pm \frac{9}{2} \\
 & x_1 = 5, x_2 = 14
 \end{aligned}$$

Probe :

$$\begin{aligned}
 & 14 - \sqrt{14^2 + 14 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 14 \\
 & 14 - 14 \neq 28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 14 - \sqrt{5^2 + 5 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 5 \\
 & 14 - 4 = 10
 \end{aligned}$$

Das heißt, $x_1 = 5$ erfüllt die Gleichung, wohingegen $x_2 = 14$ nicht als Lösung in Frage kommt.

2.

$$1 - x = \sqrt{5x - 11} \quad | \quad ()^2$$

$$(1 - x)^2 = 5x - 11$$

$$1 - 2x + x^2 = 5x - 11$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4$$

Probe :

$$1 - 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 3 - 11}$$

$$-2 \neq 2$$

$$1 - 4 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 4 - 11}$$

$$-3 \neq 3$$

Weder $x_1 = 3$ noch $x_2 = 4$ erfüllen die Gleichung.

7 Gleichungen n -ten Grades

Eine Gleichung n -ten Grades oder Polynomfunktion ist eine Summe von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten. Allgemein schreibt man:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit $a_n \neq 0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Der größte Exponent n heißt *Grad der Funktion*. Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ bezeichnet man als Koeffizienten.

Beispiel 7.1 ▶ $f(x) = 8x + 7$ *Polynom 1. Grades*

▶ $f(x) = 7x^2 + 3x + 1$ *Polynom 2. Grades (quadratische Gleichung)*

▶ $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = 0$ *Polynom 4. Grades*

Die Lösungen der Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ stellen die Nullstellen des Polynoms $f(x)$ dar. Für Polynome vom Grad $n \geq 3$ sind die Nullstellen häufig nicht mit elementaren Rechenmethoden lösbar. In diesem Fall werden die Lösungen numerisch bestimmt/angenähert.

Polynomdivision

Falls eine Gleichung n -ten Grades die Nullstelle x_1 besitzt, kann der Faktor $x - x_1$ ausgeklammert werden. Über die Division der linken Seite durch diesen Faktor erhält man als zweiten Faktor ein Polynom des Grades $n - 1$, z.B. $(x^2 - 9x + 8) : (x - 1) = x - 8$, denn $(x - 1)(x - 8) = x^2 - 9x + 8$.

Beispiel 7.2 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

1. Die erste Nullstelle x_1 wird „geraten“ bzw. durch Ausprobieren bestimmt. $x_1 = 1$ ist Nullstelle der Funktion.

2. Das Polynom wird durch den Faktor $(x - 1)$ dividiert. Dabei wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{-(-x^2 + x)} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-(-6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Es gilt also $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6)$

3. Nun werden die Nullstellen des sich aus der Polynomdivision ergebenden Polynoms bestimmt.

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
 x_1 &= -2, x_2 = 3
 \end{aligned}$$

Wie erhalten also die Nullstellen des Polynoms $\mathbb{L} = \{-2; 1; 3\}$.

8 Logarithmen

Das Logarithmieren ist eine Umkehroperation des Potenzierens und wird verwendet, wenn die Unbekannte x einer Funktion im Exponenten steht.

Für jedes $a, b > 0$ mit $a \neq 1$ hat die Gleichung $a^x = b$ genau die eine Lösung $x = \log_a b$ (sprich: „Logarithmus von b zur Basis a “). Das Ergebnis des Logarithmierens gibt also an, mit welchem Exponenten x man die Basis a potenzieren muss, um den Numerus b zu erhalten.

Es gilt

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Spezialfälle

- ▶ Zehner-Logarithmus (dekadischer Logarithmus): $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- ▶ Natürlicher-Logarithmus: $\log_e b = \ln b$ mit $e = 2,71828 \dots$ (*eulersche Zahl*)

Beispiel 8.1 Bestimmen Sie x indem Sie die Gleichungen in die Potenzschreibweise umwandeln.

$$\log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\lg 10 = x \Leftrightarrow 10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\lg 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100 \Leftrightarrow x = 2$$

Rechenregeln

1. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$

$$2. a^{\log_a b} = b; 10^{\lg b} = b; e^{\ln b} = b$$

$$3. \log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$$

$$4. \log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$5. \log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$$

$$6. \log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

$$7. p \cdot \log_a b = \log_a (b^p) \text{ mit } p \in \mathbb{R}$$

Beispiel 8.2 Vereinfachen Sie:

$$1. \log_3 (9a^4 \cdot \sqrt[5]{5}) = \log_3 9 + \log_3 a^4 + \log_3 5^{\frac{1}{5}} = 2 + 4 \log_3 a + \frac{1}{5} \log_3 5$$

$$2. \log_3 \frac{b^2}{27a^7} = \log_3 b^2 - (\log_3 27 + \log_3 a^7) = \log_3 b^2 - \log_3 27 - 7 \log_3 a$$

Berechnen Sie:

$$1. \log_{12} 4 + \log_{12} 3 = \log_{12} (4 \cdot 3) = \log_{12} 12 = 1$$

$$2. \lg 13 - \lg 130 = \lg \frac{13}{130} = \lg \frac{1}{10} = -\lg 10 = -1$$

Beispiel 8.3 Stellen Sie die folgende Gleichung nach x um und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{5} \cdot 0,2^{\frac{1}{2x}} - 0,04^{1-x} = 0 \\
 \Leftrightarrow & 5^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} - \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{1-x} = 0 \\
 \Leftrightarrow & 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2x}} - (5^{-2})^{1-x} = 0 \\
 \Leftrightarrow & 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2x}} = 5^{-2(1-x)} \\
 \Leftrightarrow & 5^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}} = 5^{-2+2x} \mid \log_5() \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = -2 + 2x \\
 \Leftrightarrow & \frac{x}{2x} - \frac{1}{2x} = -2 + 2x \\
 \Leftrightarrow & \frac{x-1}{2x} = -2 + 2x \mid \cdot (2x) \\
 \Leftrightarrow & x - 1 = -4x + 4x^2 \\
 \Leftrightarrow & x - 1 + 4x - 4x^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & -4x^2 + 5x - 1 = 0 \mid : (-4) \\
 \Leftrightarrow & x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \\
 \Rightarrow & x_{1,2} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8} \\
 & x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1 \\
 & \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{4}; 1 \right\}
 \end{aligned}$$

9 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$. Beim Lösen eines linearen Gleichungssystems können folgende Fälle eintreten:

1. Das System hat genau eine Lösung.
2. Das System hat unendlich viele Lösungen.
3. Das System hat keine Lösung.

Ist die Anzahl der Gleichungen m gleich der Anzahl der Unbekannten n spricht man von einem quadratischen System, auch $n \times n$ -System.

9.1 LGS mit zwei Unbekannten

Ein quadratisches LGS mit zwei Unbekannten x_1 und x_2 ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 &= b_1 \\a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 &= b_2\end{aligned}$$

Dabei nennt man $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}$ und $a_{2,2}$ Koeffizienten des Gleichungssystems. Man schreibt auch:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, dem Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und dem Spaltenvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Diese Schreibweise lässt sich entsprechend auf alle $m \times n$ -Systeme anwenden.

Zum Lösen von linearen Gleichungssystemen existieren verschiedene Methoden. Diese sollen in den folgenden Abschnitten anhand von Beispielen erläutert werden.

9.1.1 Die Einsetzungsmethode

Das Schema der Einsetzungsmethode soll anhand des Beispiels

$$\text{I : } 2x + 3y = 7$$

$$\text{II : } 3x - 2y = 4$$

erläutert werden. *Anmerkung:* Die Unbekannten werden in diesem Beispiel mit x und y anstelle von x_1 und x_2 bezeichnet. Diese Bezeichnung ist im zweidimensionalen Raum häufig zu finden.

1. Eine der beiden Gleichungen wird nach einer der beiden Unbekannten aufgelöst.

Für Gleichung I ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \text{I : } & \Leftrightarrow 2x = 7 - 3y \\ & \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}y \end{aligned}$$

2. Der Ausdruck, der sich nach Umstellen für die Unbekannte x ergibt, wird in die andere Gleichung eingesetzt, somit ergibt sich für Gleichung II:

$$\text{II : } 3\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}y\right) - 2y = 4$$

3. In der zweiten Gleichung befindet sich nun nur eine Unbekannte, welche sich durch Umformen bestimmen lässt.

$$\begin{aligned} \text{II : } & \Leftrightarrow \frac{21}{2} - \frac{9}{2}y - 2y = 4 \\ & \Leftrightarrow y\left(-\frac{9}{2} - 2\right) = 4 - \frac{21}{2} \\ & \Leftrightarrow -\frac{13}{2}y = -\frac{13}{2} \quad | : -\frac{13}{2} \\ & \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Ist die eine Unbekannte bekannt, erhält man durch Einsetzen in die erste Gleichung die andere Unbekannte.

$$\begin{aligned} \text{I : } & 2x + 3 \cdot 1 = 7 \\ & \Leftrightarrow 2x = 7 - 3 \\ & \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Entsteht im dritten Schritt ein Widerspruch, gibt es keine Lösung für das System. Entsteht hingegen eine Identität (z.B. $3x = 3x$), existieren unendlich viele Lösungen.

9.1.2 Die Gleichsetzungsmethode

Bei der Gleichsetzungsmethode werden beide Gleichungen nach derselben Unbekannten aufgelöst. Das Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke liefert eine Gleichung für die andere Unbekannte. Diese kann durch Umformen gelöst werden. Ist eine Unbekannte bekannt, liefert das Einsetzen in eine der Ausgangsgleichungen die zweite Unbekannte.

Beispiel 9.1 Lösen Sie folgendes LGS mithilfe der Gleichsetzungsmethode.

$$\text{I:} \quad -3x + 6y = 10$$

$$\text{II:} \quad 2x - 4y = 8$$

Zunächst stellen wir beide Gleichungen nach x um:

$$\text{I:} \quad \Leftrightarrow -3x = 10 - 6y$$

$$\Rightarrow x = -\frac{10}{3} + 2y$$

$$\text{II:} \quad \Leftrightarrow 2x = 8 + 4y$$

$$\Rightarrow x = 4 + 2y$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$-\frac{10}{3} + 2y = 4 + 2y$$

Dieser Ausdruck lässt sich für gewöhnlich nach y umstellen. In diesem Beispiel jedoch ergibt sich ein Widerspruch.

$$-\frac{10}{3} \neq 4$$

Es existiert somit keine Lösung!

Beispiel 9.2 Lösen Sie folgendes LGS mithilfe der Gleichsetzungsmethode.

$$\text{I:} \quad 2x + 3y = 7$$

$$\text{II:} \quad 3x - 2y = 4$$

$$\text{I:} \quad \Leftrightarrow 2x = 7 - 3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}y$$

$$\text{II:} \quad \Leftrightarrow 3x = 4 + 2y$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}y$$

Gleichsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{7}{2} - \frac{3}{2}y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}y \\ \Leftrightarrow & -\frac{3}{2}y - \frac{2}{3}y = \frac{4}{3} - \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow & -\frac{13}{6}y = -\frac{13}{6} \\ \Leftrightarrow & y = 1 \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung I liefert die Lösung für x

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 2x + 3 \cdot 1 = 7 \\ & x = \frac{7-3}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{(2 \mid 1)\}$$

9.1.3 Die Additionsmethode

Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit demselben Faktor, ändert sich bekanntlich der Wert der Gleichung nicht. Dieser Tatsache bedient man sich bei der Additionsmethode. Ziel der Additionsmethode ist es, eine der beiden oder beide Gleichungen durch Multiplikation so umzuformen, dass bei Addition (bzw. Subtraktion) mit der anderen Gleichung eine der beiden Unbekannten eliminiert wird.

Beispiel 9.3 Lösen Sie folgendes LGS mithilfe der Additionsmethode.

$$\text{I: } 5x + 2y = 4$$

$$\text{II: } 3x - 4y = 18$$

Zunächst multiplizieren wir Gleichung I mit zwei und addieren dann beide Gleichungen.

$$2 \cdot \text{I: } 10x + 4y = 8$$

$$+\text{II: } \underline{3x - 4y = 18}$$

$$=: 13x + 0y = 26$$

$$\Leftrightarrow 13x = 26$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Durch Einsetzen von x in eine der beiden Ausgangsgleichungen erhält man y .

$$\text{I: } 5 \cdot 2 + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4 - 10$$

$$\Leftrightarrow y = -3$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(2 \mid -3)\}$$

Beispiel 9.4 Lösen Sie folgendes LGS mithilfe der Additionsmethode.

$$\text{I: } 5x - 7y = 2$$

$$\text{II: } 6x - 8,4y = 2,4$$

$$6 \cdot \text{I: } 30x - 42y = 12$$

$$+ (-5) \text{II: } \underline{-30x + 42y = -12}$$

$$=: 0 = 0$$

D.h. es existieren unendlich viele Lösungen für dieses LGS.

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(x \mid y) \in \mathbb{R}\}$$

9.1.4 LGS mit drei Unbekannten

Bei linearen Gleichungssystemen mit drei Unbekannten bietet es sich an, mithilfe der Einsetzungs- oder der Additionsmethode eine Unbekannte zu eliminieren. Dadurch erhält man ein LGS mit zwei Unbekannten, welches nach den oben erläuterten Methoden gelöst werden kann.

Beispiel 9.5 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & x + 2y + z & = 8 \\ \text{II:} & x - y + 2z & = 5 \\ \text{III:} & 2x + 3y - 3z & = -1 \end{array}$$

Wie stellen Gleichung I nach x um und setzen den entstehenden Ausdruck in die Gleichungen II und III ein.

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & \Leftrightarrow & x = 8 - 2y - z \\ \text{II:} & \Leftrightarrow & (8 - 2y - z) - y + 2z = 5 \\ \text{III:} & \Leftrightarrow & 2(8 - 2y - z) + 3y - 3z = -1 \end{array}$$

Die Gleichungen II und III bilden nun ein LGS mit den Unbekannten y und z , welches hier mittels der Additionsmethode gelöst wird.

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \Leftrightarrow & -3y + z = -3 \\ \text{III:} & \Leftrightarrow & -y - 5z = -17 \\ \\ 5 \cdot \text{II:} & & -15y + 5z = -15 \\ + \text{III:} & & \underline{-y - 5z = -17} \\ =: & & -16y = -32 \\ \Rightarrow & & y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II:} & \Leftrightarrow & -3 \cdot 2 + z = -3 \\ \Rightarrow & & z = 3 \\ \text{I:} & \Leftrightarrow & x = 8 - 2 \cdot 2 - 3 \\ \Rightarrow & & x = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1 \mid 2 \mid 3)\}$$

10 Ungleichungen

Definition 10.1 Ungleichungen *liegen vor, wenn man zwei Rechenausdrücke (Terme) durch eines der Relationszeichen $<$, $>$, $\leq$ oder $\geq$ miteinander verbindet.*

Ähnlich wie Gleichungen lassen sich Ungleichungen in vielen Fällen durch äquivalente Umformungen lösen:

1. Zu beiden Seiten der Ungleichung dürfen beliebige Terme addiert oder subtrahiert werden.
2. Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen *positiven* Term multipliziert bzw. durch diesen dividiert werden.
3. Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen *negativen* Term multipliziert bzw. durch diesen dividiert werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen umgedreht wird.
4. Die beiden Seiten einer Ungleichung dürfen miteinander vertauscht werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen umgedreht wird.

Die Lösungsmengen von Ungleichungen sind in der Regel Intervalle.

Beispiel 10.1 *Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.*

1.

$$\begin{aligned}
 & 2x - 5 \geq \frac{5}{2}x + 8 \\
 \Leftrightarrow & 2x - \frac{5}{2}x \geq 8 + 5 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{2}x \geq 13 \mid \cdot (-2) \\
 \Leftrightarrow & x \leq 26 \\
 \Rightarrow & \mathbb{L} = \{(-\infty; 26]\}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & 2x + 4 < 3x + 5 \\
 \Leftrightarrow & 2x - 3x < 5 - 4 \\
 \Leftrightarrow & -x < 1 \mid : (-1) \\
 \Leftrightarrow & x > -1 \\
 \Rightarrow & \mathbb{L} = \{[-1; \infty)\}
 \end{aligned}$$

11 Funktionen

Definition 11.1 Eine Funktion einer Variablen ist eine Vorschrift, welche jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y des Wertebereichs W zuordnet. Man schreibt:

$$y = f(x)$$

11.1 Lineare Funktionen (Geraden)

Die allgemeine Funktionsgleichung für eine Gerade, oder auch *lineare Funktion*, lautet $y = m \cdot x + b$ mit $m, b, \in \mathbb{R}$.

Dabei bezeichnet man den Faktor m als *Steigung* der Geraden. Der Faktor b stellt den Schnittpunkt mit der y -Achse dar.

Spezialfälle:

1. Gerade durch den Ursprung: $y = m \cdot x$
2. Waagerechte Gerade (Steigung gleich Null): $y = b$

11.1.1 Zugehörigkeit eines Punktes

Ein Punkt $P(x | y)$ liegt auf den Graphen einer Funktion $y = f(x)$, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Beispiel 11.1 Überprüfen Sie, ob die Punkte $P_1(0 | 2)$ und $P_2(2 | 6)$ auf dem Graphen der Funktion $y = 5x - 4$ liegen.

$$P_1: \quad 2 \stackrel{?}{=} 5 \cdot 0 - 4$$

$$2 \neq -4$$

$$P_2: \quad 6 \stackrel{?}{=} 5 \cdot 2 - 4$$

$$6 = 6$$

Da heißt, P_1 befindet sich nicht auf dem Funktionsgraphen, P_2 hingegen schon.

11.1.2 Bestimmung der Funktionsgleichung

Punkt-Steigungsform: Sind der Punkt $P(x_0/y_0)$ und die Steigung m einer Geraden bekannt, lautet die Geradengleichung

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

oder

$$y = mx + y_0 - mx_0 = mx + b$$

Beispiel 11.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch den Punkt $P(3 | 4)$ mit der Steigung $m = \frac{2}{3}$.

$$y = \frac{2}{3}x + 4 - \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{2}{3}x + 2$$

Zwei-Punktform: Sind die beiden Punkte $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ bekannt, so lautet die Funktionsgleichung der durch diese Punkte verlaufenden Geraden

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

oder

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1$$

Beispiel 11.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch die Punkte $P_1(1 | 2)$ und $P_2(4 | 6)$.

$$y = \frac{6-2}{4-1}x - \frac{6-2}{4-1} \cdot 1 + 2 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

11.2 Quadratische Funktionen (Parabeln)

Eine Funktion der Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ stellt eine allgemeine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(x_S, y_S)$ dar. Eine andere Darstellungsform für Parabeln ist die Scheitelpunktsform:

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Für die Koordinaten des Scheitelpunktes gilt dabei:

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} \\ y_S &= -\frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Jede Parabel ist zu einer Geraden symmetrisch, die zur y -Achse parallel ist und durch den Scheitelpunkt S verläuft.

Es gilt

- $a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet.
- $a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet.

11.2.1 Schnittpunkte von Parabel und Geraden

Um die Schnittpunkte von einer Parabel $y = f(x)$ mit einer Geraden g zu bestimmen, werden die entsprechenden Funktionsgleichungen gleichgesetzt und nach x aufgelöst. Das Einsetzen des x -Wertes in eine der Ausgangsgleichungen liefert den entsprechenden y -Wert des Schnittpunktes.

Beispiel 11.4 Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2}$ mit den Geraden $g_1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ und $g_2 = \frac{1}{2}x + 2$.

1.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 9 = 0 \mid \cdot (-2) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 9x + 18 = 0 \\ \Rightarrow & x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \\ & x_1 = 3, x_2 = 6 \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt $y_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} = 1$ und $y_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Die Parabel hat somit mit der Geraden g_1 die beiden Schnittpunkte $P_1(3 \mid 1)$ und $P_2(6 \mid \frac{5}{2})$.

2.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2} = \frac{1}{2}x + 2 \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{23}{2} = 0 \mid \cdot (-2) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 9x + 23 = 0 \\ & x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 23} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{-\frac{11}{4}} \end{aligned}$$

Da hier ein negativer Ausdruck unter der Wurzel steht, gibt es in reellen Raum keine Lösung für die Gleichung, d.h. die Gerade g_2 schneidet die Parabel nicht.

11.3 Ganzrationale Funktionen

Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

heißt *ganzrationale Funktion* oder auch *Polynomfunktion* n -ten Grades. Den Schnittpunkt mit der y -Achse einer solchen Funktion erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ ($f(0) = a_0$). Die Schnittpunkte mit der x -Achse (Nullstellen) werden durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ bestimmt.

11.4 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 11.2 Unter einer gebrochenrationalen Funktion $f(x)$ versteht man eine Funktion, die sich als Quotient zweier Polynome $g(x)$ und $h(x)$ darstellen lässt.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$g(x)$ wird dabei als Zählerpolynom, $h(x)$ als Nennerpolynom bezeichnet.

Eine gebrochenrationale Funktion ist an den Nullstellen des Nennerpolynoms nicht definiert, dort liegen Definitionslücken vor. Den Definitionsbereich D von f erhält man also durch Ausschließen der Elemente von $\mathbb{R}$ für die $h(x) = 0$ gilt.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}$$

Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion werden durch die Nullstellen des Zählerpolynoms bestimmt.

Ist ein Wert x_0 gleichzeitig Nullstelle von Zähler- und Nennerpolynom, liegt für diesen Punkt eine stetig behebbare Definitionslücke vor. Ist x_0 Nullstelle vom Nennerpolynom, jedoch nicht vom Zählerpolynom, liegt dort eine Polstelle vor.

Beispiel 11.5 Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der folgenden gebrochenrationalen Funktionen.

1. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$D = \mathbb{R} \setminus -1$: Die Nullstelle des Nennerpolynoms lautet $x = -1$, dies ist keine Nullstelle des Zählerpolynoms und somit eine Polstelle. $x = 1$ ist Nullstelle des Zählerpolynoms und somit Nullstelle der Funktion $f(x)$.

2. $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$

$D = \mathbb{R}$: Das Zählerpolynom hat keine Nullstelle im reellen Raum, somit liegen keine Definitionslücken vor. $x = 2$ ist Nullstelle des Zählerpolynoms und somit Nullstelle der Funktion $f(x)$.

3. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2}$

Wir bestimmen die Nullstellen des Nennerpolynoms mithilfe der $p-q$ -Formel:

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = -2/1$, daraus folgt $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Für die Nullstellen des Zählerpolynoms erhalten wir $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$. $x = 1$ ist sowohl Nullstelle des Zählerpolynoms als auch des Nennerpolynoms, somit liegt hier eine stetig hebbare Definitionslücke vor. $x = -2$ ist eine Polstelle.

Wir wollen das letzte Beispiel etwas genauer betrachten. Da die Nullstellen des Nennerpolynoms bereits bestimmt wurden, können wir den Nenner in faktorisierte Schreibweise darstellen:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

Schließt man $x = 1$ und $x = -2$ für den Definitionsbereich der Funktion aus, kann die Funktion durch den Faktor $(x-1)$ gekürzt werden. Übrig bleibt der Funktionsterm:

$$f(x) = \frac{x}{x+2}, \text{ mit } D = \mathbb{R} \setminus \{-2/1\}$$

Dabei hat das Kürzen keinen Einfluss auf das Vorzeichen oder die Funktionswerte der Funktion.

Um das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke $x = 1$ näher zu untersuchen, nähert man sich diesem Wert von beiden Seiten an. Setzt man Werte für x ein, die der Eins beliebig nahe kommen (z.B. 0,0009 und 1,0001) zeigt sich, dass die Funktion sich in $x = 1$ dem Funktionswert $\frac{1}{3}$ nähert. Man sagt die Funktion strebt für $x = 1$ gegen $\frac{1}{3}$.

Hierbei handelt es sich um eine Grenzwertbetrachtung. Man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x+2} \right) = \left| \frac{1}{1+2} \right| = \frac{1}{3}$$

(Sprich: "Limes f von x für x gegen 1")

11.5 Die Exponentialfunktion

Definition 11.3 Als Exponentialfunktion zur Basis a bezeichnet man eine Funktion der Form $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$. Für $a > 1$ heißt die Funktion streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ heißt sie streng monoton fallend.

Eigenschaften der Exponentialfunktion

- Alle Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ verlaufen durch den Punkt $P(0/1)$, da $a^0 = 1$
- Alle Exponentialfunktionen verlaufen oberhalb der x -Achse: $W = \mathbb{R}^+$
- Für das Grenzwertverhalten der Exponentialfunktion gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x &= \begin{cases} \infty & , \text{ wenn } a > 1 \\ 0 & , \text{ wenn } 0 < a < 1 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } a > 1 \\ \infty & , \text{ wenn } 0 < a < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

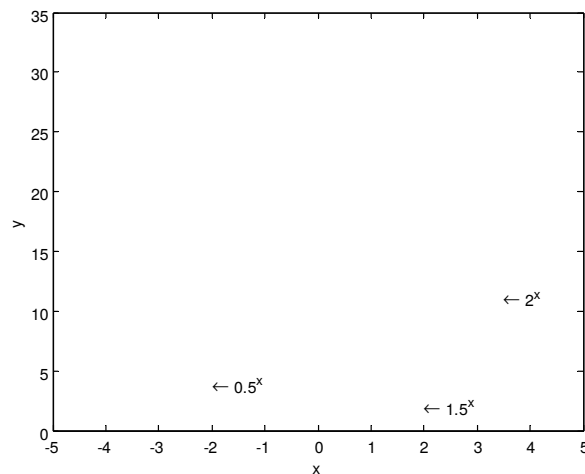


Abbildung 11.1: Die Exponentialfunktion

Bemerkung 11.1 Eine besondere Funktion stellt die Exponentialfunktion zur Basis $e = 2,71828\dots$ (eulersche Zahl) dar. $f(x) = e^x$ ist die einzige Funktion bei der Steigung und Funktionswert in jedem Punkt übereinstimmen.

Praktische Anwendung der Exponentialfunktion

Exponentialfunktionen spielen eine große Rolle in der Beschreibung von physikalischen Prozessen, bei denen das Ergebnis der Veränderungen, also die Abnahme oder die Zunahme einer Größe die weiteren Veränderungen selbst wieder beeinflussen. Bekannte Beispiele sind der radioaktive Zerfall oder die Beschreibung von Bakterienwachstum.

Zur Beschreibung von exponentiellen Wachstumsvorgängen verwendet man die Exponentialfunktion meist in der Form $f(t) = c \cdot a^t$, da bei praktischen Anwendungen die unabhängige Variable t in der Regel die Zeit repräsentiert.

11.6 Die Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $a^y = x$. Die Logarithmusfunktion ist nur für positive Argumente x definiert, dazu muss $a > 0$ und $a \neq 1$ vorausgesetzt werden.

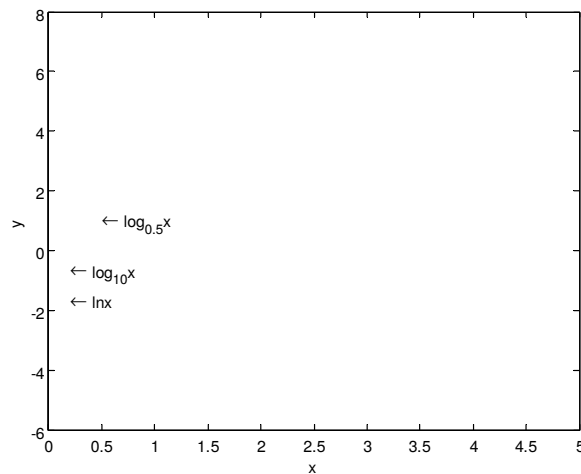


Abbildung 11.2: Die Logarithmusfunktion

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

- Alle Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ verlaufen durch den Punkt $P(1 \mid 0)$, da $\log_a 1 = 0$
- Alle Logarithmusfunktionen verlaufen im positiven Bereich der x -Achse: $D = \mathbb{R}^+$

- Für das Grenzwertverhalten der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty & , \text{ wenn } a > 1 \\ -\infty & , \text{ wenn } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & , \text{ wenn } a > 1 \\ \infty & , \text{ wenn } 0 < a < 1 \end{cases}$$

11.7 Trigonometrische Funktionen

Mit trigonometrischen Funktionen oder auch Winkelfunktionen bezeichnet man mathematische Zusammenhänge zwischen Winkeln und Seitenverhältnissen von rechtwinkligen Dreiecken. Aber auch bei der Beschreibung von periodischen Vorgängen in der Physik spielen trigonometrische Funktionen eine grundlegende Rolle.

Die elementaren trigonometrischen Funktionen sind Sinus (sin), Kosinus (cos) und Tangens (tan).

11.7.1 Definition am rechtwinkligen Dreieck

Ursprünglich sind die trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken und daher nur für Winkel von 0 bis 90 Grad definiert:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

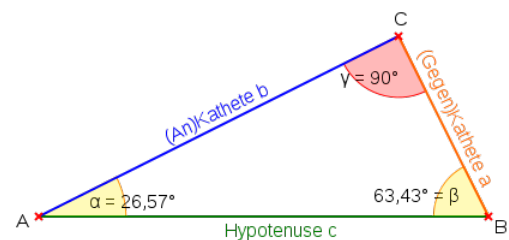


Abbildung 11.3: Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck¹

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit gleichem Winkel α ergeben diese Verhältnisse den gleichen Wert.

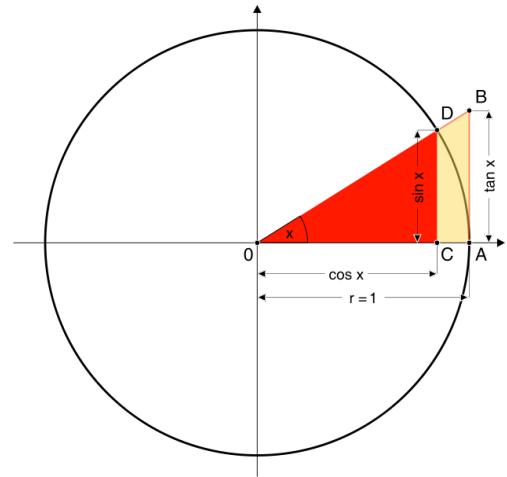
11.7.2 Definition am Einheitskreis

¹Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:RechtwinkligesDreieck.svg>, Abruf:31.07.2013

²Quelle: http://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Winkelfunktionen_Einheitskreis.svg, Abruf:31.07.2013

Die trigonometrischen Funktionen können am Einheitskreis auf größere Winkel erweitert werden. Der Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius 1, der Umfang des Einheitskreises beträgt somit 2π .

Verbindet man einen *beliebigen* Punkt P auf dem Umfang des Einheitskreises mit dem Ursprung und fällt das Lot auf die x -Achse, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α . Dabei wird α ausgehend von der x -Achse gegen den Uhrzeigersinn drehend als positiv betrachtet.

Abbildung 11.4: Der Einheitskreis²

Die Seite des Dreiecks, welche auf der x -Achse liegt liefert den Kosinus von α . Die Seite, welche parallel zur y -Achse verläuft, liefert den Sinus von α (siehe Abbildung 11.4). Somit können den trigonometrischen Funktionen nun Winkel von 0 bis 360 Grad zugeordnet werden. Die Funktionswerte liegen dabei jeweils zwischen -1 und 1, können also auch negative Werte annehmen.

Umrechnung Gradmaß - Bogenmaß

Neben dem Gradmaß ist das Bogenmaß eine weitere Einheit für Winkel. Während im Alltag meist das Gradmaß verwendet wird, ist in der Mathematik das Bogenmaß oft zweckmäßig.

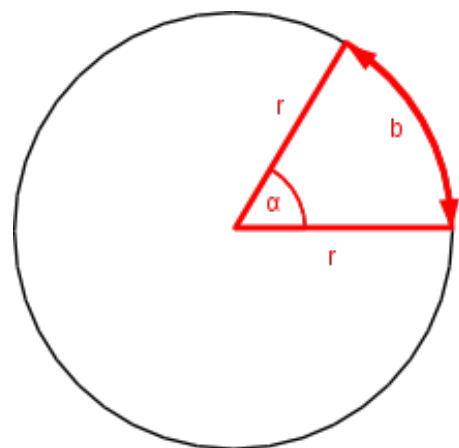
Der Zusammenhang zwischen beiden Größen kann anschaulich am Einheitskreis gezeigt werden. Einem Winkel α im Gradmaß wird hier die Länge eines Kreisbogens x zugeordnet. Diese Länge x ist die Maßzahl des Winkels im Bogenmaß. Da der Umfang des Einheitskreises 2π beträgt, entsprechen einer vollen Umdrehung von 360° im Gradmaß $2\pi\text{rad}$ (sprich: „Radian“) im Bogenmaß. .

- Umrechnung vom Grad- ins Bogenmaß:

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha$$

- Umrechnung vom Bogen- ins Gradmaß:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} x$$



³Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Radian_measure-def2.svg ²Abbildung 11.5: Das Bogenmaß³

11.7.3 Wichtige Zusammenhänge

Stellt man Sinus und Kosinus im kartesischen Koordinatensystem dar, zeigen beide Funktionen denselben Verlauf, sind jedoch auf der x -Achse um 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ verschoben.

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right); \sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

Trigonometrischer Satz des Pythagoras: $\sin^2 + \cos^2 = 1$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2 \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2\end{aligned}$$

12 Vektoren

Vektoren sind gerichtete Größen, was bedeutet, dass sie neben ihrem Betrag auch eine Richtung besitzen. Symbolisch werden Vektoren als Pfeile im Raum dargestellt. Die Pfeillänge heißt dann *Betrag*, die Pfeilspitze kennzeichnet die *Richtung*. In der Physik verwendet man Vektoren zur Beschreibung von gerichteten Größen, wie beispielsweise Kräften oder Geschwindigkeiten.

Skalare hingegen sind Größen ohne Richtungseigenschaften. Skalare physikalische Größen sind zum Beispiel Temperatur oder Druck.

Mithilfe von Vektoren können in der analytischen Geometrie Parallelverschiebungen von Elementen beschrieben werden. Abbildung 12.1 zeigt die Parallelverschiebung eines Dreiecks ABC um den Vektor $\vec{v}$ im zweidimensionalen Raum. Der Vektor $\vec{v}$ beschreibt dabei die Verschiebung von A nach A' , die

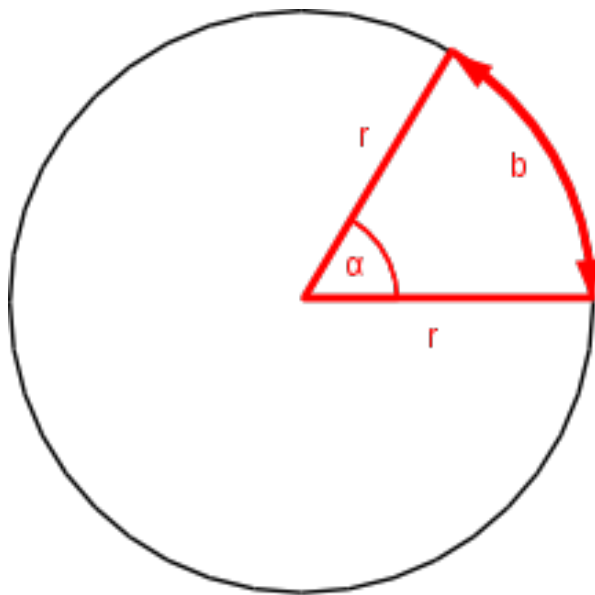


Abbildung 12.1: Parallelverschiebung eines Dreiecks um den Vektor $\vec{v}$ ¹

Verschiebung von B nach B' und die Verschiebung von C nach C' .

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$

¹Quelle: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/5/59/Vektoren.svg>, Abruf:31.07.2013

Die Zahlenpaare, die einen Vektor definieren, werden oft untereinander geschrieben.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Man bezeichnet Vektoren in dieser Schreibweise als *Spaltenvektoren*. In dem Beispiel aus Abbildung 12.1 gilt somit für den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} A'_x - A_x \\ A'_y - A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-6) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Spezielle Vektoren

Nullvektor: Der Vektor der Länge Null wird als *Nullvektor* $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Ortsvektor: Ein Vektor, der aus dem Ursprung des Koordinatensystems auf einen Punkt P gerichtet ist, nennt man *Ortsvektor* $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

12.1 Rechnen mit Vektoren

1. Addition:

Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden komponentenweise addiert:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Geometrisch kann man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addieren, indem man die beiden Vektoren so durch Pfeile darstellt, dass der Startpunkt des zweiten mit dem Endpunkt des ersten Pfeils übereinstimmt.

2. Subtraktion:

Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden komponentenweise subtrahiert:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Geometrisch kann man die Subtraktion $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ als Addition mit dem Gegenvektor $-\vec{b}$ interpretieren: $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

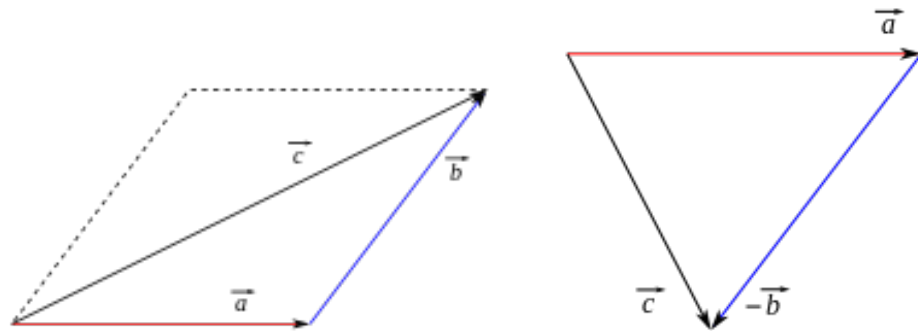


Abbildung 12.2: Addition und Subtraktion zweier Vektoren²

3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar λ :

$$\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

4. Betrag $\|\vec{v}\|$ eines Vektors:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

5. Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \\ &= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Dabei ist α der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel. Stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander ist das Skalarprodukt folglich Null.

6. Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \right)$$

²Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wektory_sumt.svg
und https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wektory_rozt.svg, Abruf:31.07.2013

7. Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

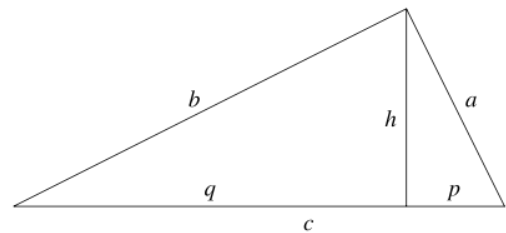
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor, der senkrecht auf den beiden Ausgangsvektoren steht und dessen Betrag der Fläche des Parallelogramms entspricht, welches von den beiden Ausgangsvektoren aufgespannt wird.

13 Elementare Geometrie

13.1 Flächeninhalte

- Quadrat mit der Kantenlänge a : $A = a^2$
- Rechteck mit den Seiten a und b : $A = a \cdot b$
- Dreieck mit der Grundseite g und der Höhe h : $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
 oder $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$



13.2 Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck verhalten sich zwei Seiten eines Dreiecks wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}; \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

13.3 Kosinussatz

In einem beliebigen Dreieck ist das Quadrat einer Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus beiden Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

13.4 Strahlensätze

Werden zwei von einem gemeinsamen Punkt Z ausgehende Strahlen von Parallelen geschnitten, so gilt:

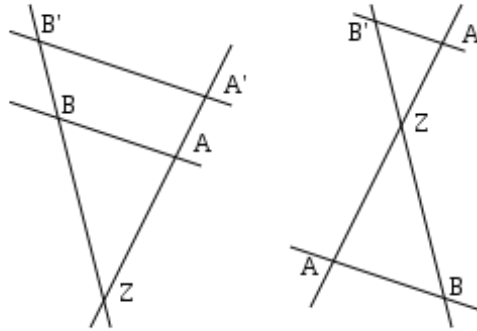


Abbildung 13.1: Strahlensätze¹

1. Die Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \text{ bzw. } \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

2. Die Abschnitte auf den beiden Parallelen verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl vom Punkt S aus gemessen:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

¹Quelle: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/1/10/Strahlensatz.svg>, Abruf:31.07.2013

13.5 Sätze über das rechtwinklige Dreieck

13.5.1 Satz des Thales

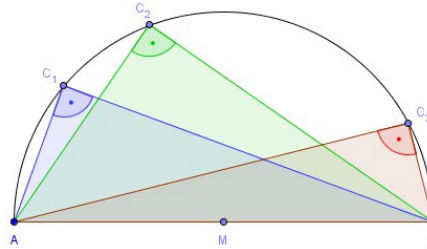


Abbildung 13.2: Satz des Thales²

Der Satz des Thales sagt aus, dass jedes Dreieck, welches aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises (Thaleskreis) und einem weiteren Punkt dieses Halbkreises konstruiert wird, rechtwinklig ist. Dabei ist immer der Winkel auf dem Halbkreisbogen rechtwinklig.

13.5.2 Satz des Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dabei sind a und b die Katheten des Dreiecks, c die Hypotenuse.

13.5.3 Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$

Dabei ist h die Höhe des Dreiecks, p und q sind die Hypotenusenabschnitte der Hypotenuse $c = p + q$.

13.5.4 Kathetensatz

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a^2 = c \cdot p \text{ und } b^2 = c \cdot q$$

²Quelle: http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/satz_von_thales_4.jpg, Abruf:31.07.2013

Dabei ist h die Höhe des Dreiecks, p und q sind die Hypotenusenabschnitte der Hypotenuse $c = p + q$.

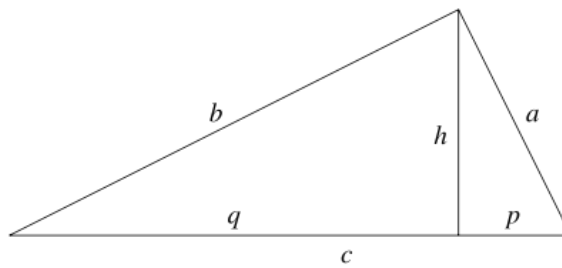


Abbildung 13.3: rechtwinkliges Dreieck³

³Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Right_triangle_abchpq.svg, Abruf:31.07.2013

14 Differentialrechnung

Zentrales Thema der Differentialrechnung ist das Ableiten von Funktionen. Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ ordnet jedem x der Funktion $f(x)$ den Steigungswert der dortigen Kurventangente zu. Ausgangspunkt für die Definition der Ableitung ist die Näherung der Tangentensteigung durch eine Sekantensteigung.

Die Steigung der Sekante (Verbindung der Punkte $(x_0/f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x/f(x_0 + \Delta x))$) wird als mittlere Steigung m_s des Kurvenstücks bezeichnet, man spricht auch vom *Differenzenquotienten*:

$$m_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

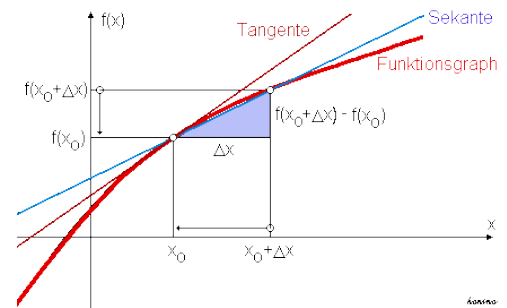


Abbildung 14.1: Definition der Ableitung einer Funktion¹

mit $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Um die Tangentensteigung zu bestimmen, wird der Abstand zwischen den beiden Punkten, durch welche die Sekante gezogen ist, immer weiter verkleinert bis Δx und Δy gegen Null gehen. Diesen Grenzwert nennt man *Differentialquotienten* oder erste *Ableitung*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Alternative Schreibweisen für $f'(x)$ sind y' oder $\frac{dy}{dx}$.

14.1 Ableitungsregeln

1. Potenzfunktionen:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

¹Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ableitung.png>, Abruf:31.07.2013

Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \\ f(x) = x^2 &\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^1 = 2x \\ f(x) = x^3 &\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. Faktorregel: Ein konstanter Faktor k bleibt beim Ableiten erhalten.

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

3. Summenregel: Eine Summe von Funktionen wird summandenweise abgeleitet.

$$(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$$

4. Produktregel: Beim Ableiten eines Produktes zweier Funktionen gilt „einen Ableiten mal einen Abschreiben plus einen Abschreiben mal einen Ableiten“.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

5. Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

6. Kettenregel: Eine Funktion, welche aus zwei Funktionen zusammengesetzt ist, wird abgeleitet, indem man das Produkt aus der inneren und der äußeren Ableitung bildet.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} (\sin(x^2))' &= \cos(x^2) \cdot 2x \\ (\ln(1+x^3))' &= \frac{1}{1+x^3} \cdot 3x^2 \\ (e^{\sin x})' &= e^{\sin x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

14.2 Kurvendiskussion

14.2.1 Lokale Extremwerte

Besitzt die Funktion $f(x)$ in x_0 einen Lokalen Extremwert, so gilt die notwendige Bedingung:

$$f'(x_0) = 0$$

Über die Art des Extremwertes (Minimum oder Maximum) entscheidet die zweite Ableitung.

$$f''(x_0) \neq 0$$

$$f''(x_0) < 0 \quad \text{lokales Maximum}$$

$$f''(x_0) > 0 \quad \text{lokales Minimum}$$

14.2.2 Krümmung / Wendepunkte

Die zweite Ableitung $f''(x)$ bestimmt das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x)$.

$$f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt (konkav)}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt (konvex)}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{Wendepunkt}$$

15 Integralrechnung

Das *bestimmte Integral*

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

bezeichnet anschaulich den Flächeninhalt zwischen der Funktion $f(x)$ und der x -Achse zwischen den Intervallgrenzen $[a, b]$. Flächenanteile unterhalb der x -Achse werden dabei negativ gewertet.

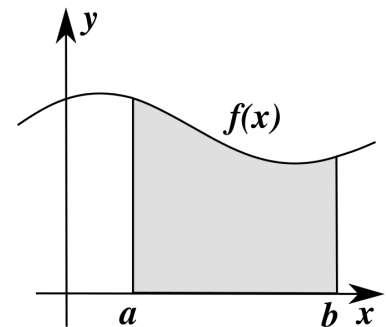


Abbildung 15.1: Flächenintegral¹

$F(x)$ ist die *Stammfunktion* von $f(x)$. Die Bestimmung einer Stammfunktion ist also die „Umkehrung“ zur Ableitung.

Das *unbestimmte Integral* $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ ist im Gegensatz zum bestimmten Integral keine Zahl sondern eine Funktion (Stammfunktion). C heißt dabei *Integrationskonstante*.

15.1 Integrationsregeln

1. Faktorregel: Ein konstanter Faktor k darf vor das Integral gezogen werden.

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx$$

2. Summenregel: Eine Summe von Funktionen darf summandenweise integriert werden.

$$\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

3. Partielle Integration: Die partielle Integration kann verwendet werden, wenn man ein Produkt zweier Funktionen integriert. Sie leitet sich aus der Produktregel der Differentialrechnung her.

$$\int F(x) \cdot g(x) \, dx = F(x) \cdot G(x) - \int f(x) \cdot G(x) \, dx$$

¹Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Integral_as_region_under_curve.svg, Abruf:31.07.2013

Dabei gilt $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$.

15.2 Einige wichtige Grundintegrale

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sin(x) dx$	$-\cos(x) + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int \cos(x) dx$	$\sin(x) + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln(x) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$	$\tan(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\arctan(x) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$	$-\cot(x) + C$