

Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. **Quadratische Gleichungen**
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5. Quadratische Gleichungen



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule** 
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.1 Reinquadratische Gleichungen

$$ax^2 + c = 0, a \neq 0$$

Die reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ lässt sich durch äquivalente Umformungen in folgende Form bringen:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

1. $-\frac{c}{a} > 0$: zwei Lösungen $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$;
2. $-\frac{c}{a} < 0$: nicht lösbar in $\mathbb{R}$; $L = \{\}$;
3. $c = 0$: einzige Lösung $x = 0$

Beispiele:

a) $4x^2 - 121 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 121 \Leftrightarrow x^2 = \frac{121}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{121}{4}} = \pm \frac{11}{2}$$

b) $\sqrt{2}x^2 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{2}}$$

c) $x^2 + 64 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = -64 \Rightarrow \text{keine reelle Lösung}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:



Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.2 Spezielle quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx = 0, \quad a, b \neq 0$$

Die Lösungen der speziellen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx = 0$ ergeben sich durch **Ausklammern**:

$$x(ax + b) = 0$$

Nach „**Produkt-Null-Satz**“ ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$) ergibt sich, dass entweder $x = 0$ oder $ax + b = 0$.

Die Lösungen sind deshalb $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Beispiel: $x^2 - 3x = 0$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 3$$

$$L = \{0, 3\}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

Manchmal ist es erforderlich einen Ausdruck in die Form eines Binoms zu bringen (z.B. quadratische Form einer verschobenen Parabel).

Dies geschieht mit Hilfe des oder 2. Binoms, indem es „rückwärts“ angewendet wird.

Durch **quadratische Ergänzung** wird der Term $ax^2 + bx + c = 0$ als **Summe** eines mit einem **Faktor** versehenen **Quadrats** und einem **konstanten Anteil** dargestellt:

i. **Normalform:** $x^2 + dx + c$, für $a = 1$

$$x^2 + dx + c = x^2 + dx + \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4} + c = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{d^2}{4}\right)$$

Beispiele:

$$x^2 + 2x + 3 = \left(x^2 + 2x + \frac{2^2}{4}\right) + \left(3 - \frac{2^2}{4}\right) = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2$$

$$x^2 - 4x + 7 = \left(x^2 - 4x + \frac{(-4)^2}{4}\right) + \left(7 - \frac{(-4)^2}{4}\right) = (x^2 - 4x + 4) + (7 - 4) = (x - 2)^2 + 3$$

Weiter: die Nullstellen direkt berechnen wie in der reinquadratischen Gleichung!



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

ii. Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Wir prüfen mit der binomischen Formel nach:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Beispiel: Wir formen den Term
 $-3x^2 + x - 5$
 durch quadratische Ergänzung um
 und berechnen die Nullstellen:

$$\begin{aligned} -3x^2 + x - 5 &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) - 5 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6^2}\right) - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{6^2} - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{59}{12}. \end{aligned}$$

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

ii. Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Aufgabe: Formen Sie folgenden Term mit quadratischer Ergänzung um:

$$-\frac{5}{2}x^2 + x - 9$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

2. Lösungsmethode „Mitternachtsformel“ oder „abc-Form“

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{mit Diskriminante } D = b^2 - 4ac$$

Die Anzahl der Lösungen hängt von D ab:

- i. Für $D > 0$ gibt es zwei Lösungen;
- ii. Für $D = 0$ gibt es eine Lösung;
- iii. Für $D < 0$ gibt es keine Lösungen: $L = \{ \}$

Beispiel: $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$

$$D = 3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow \text{es gibt zwei Lösungen}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 - \sqrt{5} \wedge x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 + \sqrt{5}$$

$$L = \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

3. Lösungsmethode „pq-Formel“ (Sonderfall von „abc-Form“)

Nur für Normalform $x^2 + px + q$ mit $a = 1$ gültig:

Beispiel: Wir lösen die folgende Gleichung mit *quadratischer Ergänzung* und direkt mit der *pq-Formel*:

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

a. Quadratische Ergänzung ergibt:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 4 = 0$$

$$\text{bzw. } (x - 3)^2 = 5$$

b. Mit $p = -6$ und $q = 4$ bekommen wir:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

pq-Formel: Wenn die Diskriminante d nichtnegativ ist:

$$d = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zwei reelle Lösungen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Falls $d = 0$ ist, fallen die Lösungen zu einer einzigen zusammen.



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

4. Lösungsmethode „Satz von Vieta“ (1540-1603)

Nur für Normalform $x^2 + px + q$ mit $a = 1$ gültig:

Beispiel 1: Gesucht ist die Normalform der quadratischen Gleichung, welche die folgenden Lösungen besitzt :

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ und } x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Lösung: Nach Satz von Vieta gilt

$$p = -(x_1 + x_2) = -(1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}) = -2$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow \text{Normalform lautet: } x^2 - 2x - 1 = 0$$

Beispiel 2:

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 \cdot x_2 = 35$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 5$$

$$\Rightarrow L = \{5, 7\}$$

Beispiel 3:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 1$$

$$\Rightarrow L = \{-2, 1\}$$

Satz von Vieta Sei $\left(\frac{p}{4}\right)^2 - q \geq 0$, dann besitzt die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zwei Nullstellen x_1 und x_2 . Es gilt

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

und

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

5. Sonderfälle

Beispiel

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0 \quad x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_2 = -1, \quad x_3 = -3$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 0\}$$

Beispiel:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad \text{Substitution: } z = x^2$$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$z_1 = \frac{10 + 8}{2} = 9 \quad x^2 = z_1 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$$

$$z_2 = \frac{10 - 8}{2} = 1 \quad x^2 = z_2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 1, 3\}$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. **Wurzelgleichungen**
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

6. Wurzelgleichungen



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule** 
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Allgemeine Gleichungen

Neben den bisher beschriebenen (Standard-)Formen können Gleichungen natürlich auch jede andere mathematische Form haben.

Beispiele:

$$\ln x - \ln x^2 = 5,$$

$$\sqrt{x+3} = 2 + 5x$$

$$\sin x = \frac{x}{2}$$

Indem man die linke Seite einer Gleichung auf die rechte Seite bringt, erhält man folgende Aussage:

Die allgemeinste Form einer Gleichung ist $f(x) = 0$

Dies bedeutet:

Das Lösen einer Gleichung entspricht der Suche nach den Nullstellen einer Funktion.



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Definition und Lösungsweg

Gleichungen mit Wurzel, in **deren Radikanden die Unbekannte x** vorkommt, heißen Wurzelgleichungen.

Falls nur eine Wurzel der Form $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ auftritt und außerhalb der Wurzel die Unbekannte x nur linear vorkommt, bietet sich folgender Lösungsweg an:

1. Man bringe die Wurzel auf eine Seite.
2. Man quadriere beide Seiten der umgeformten Gleichung.

! Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, da durch das Quadrieren kommt eine Lösung dazu.

3. Man Löse die entstehende Gleichung.
4. Man überprüfe, welche der Lösungen die Ausgangsgleichung tatsächlich erfüllt → **Probe!**



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Beispiele



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule



Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

1.

$$14 - \sqrt{x^2 + x - 14} = 2x$$

$$\Leftrightarrow 14 - 2x = \sqrt{x^2 + x - 14} \quad | \quad ()^2$$

$$\Leftrightarrow (14 - 2x)^2 = x^2 + x - 14$$

$$\Leftrightarrow 196 - 56x + 4x^2 = x^2 + x - 14$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 57x + 210 = 0 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 19x + 70 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4} - 70} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{19}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$$x_1 = 5, x_2 = 14$$

Probe :

$$14 - \sqrt{14^2 + 14 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 14$$

$$14 - 14 \neq 28$$

$$14 - \sqrt{5^2 + 5 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 5$$

$$14 - 4 = 10$$

Das heißt, $x_1 = 5$ erfüllt die Gleichung, wohingegen $x_2 = 14$ nicht als Lösung in Frage kommt.

Beispiele



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

2.

$$1 - x = \sqrt{5x - 11} \quad | \quad ()^2$$

$$(1 - x)^2 = 5x - 11$$

$$1 - 2x + x^2 = 5x - 11$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4$$

Probe :

$$1 - 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 3 - 11}$$

$$-2 \neq 2$$

$$1 - 4 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 4 - 11}$$

$$-3 \neq 3$$

Weder $x_1 = 3$ noch $x_2 = 4$ erfüllen die Gleichung.

Übersicht

1. Rechengesetze
2. Elementare Gleichungen
3. Anordnung und Betrag
4. Potenzen
5. Quadratische Gleichungen
6. Wurzelgleichungen
7. Gleichungen n-ten Grades
8. Logarithmen
9. Lineare Gleichungssysteme
10. Funktionen
11. Ungleichungen
12. Elementargeometrie
13. Vektoren – Grundbegriffe
14. Ableitung – Grundbegriffe
15. Integral – Grundbegriffe



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

7. Gleichungen n-ten Grades



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule** 
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Polynome

Eine **Gleichung n-ten Grades** oder **Polynom vom Grad n** ist eine Summe von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten. Allgemein schreibt man:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Die Parameter a_k werden dabei als **Koeffizienten** bezeichnet.

Beispiele:

1. Polynom 4. Grades:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^2 + x,$$

2. Polynom 3. Grades:

$$P(x) = 3x^3 - 2x - 1$$

3. Polynom 1. Grades (Gerade):

$$P(x) = -3x + 2$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Polynome

Polynome können wir addieren:

Durch die Addition von Polynomen entsteht wieder ein Polynom. Addieren wir die Polynome

$$P(x) = 3x^3 - 2x - 1 \quad \text{und} \quad Q(x) = -4x^4 + 2x^3 - 3x + 2,$$

so entsteht das Polynom

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - 2x - 1 - 4x^4 + 2x^3 - 3x + 2 = -4x^4 + 5x^3 - 5x + 1.$$

Polynome können wir dividieren.

Wie bei den **ganzen Zahlen** kann eine **Division aufgehen** oder es kann ein **Rest** bleiben.

Ähnliches gilt nun für Polynome. Offensichtlich enthält das Polynom:

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

das Polynom $Q(x) = x + 1$ als Teiler:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = x + 1.$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Nullstellen

Die Lösungen der Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ stellen die Nullstellen des Polynoms $f(x)$ dar. Für Polynome vom Grad $n \geq 3$ sind die Nullstellen häufig nicht mit elementaren Rechenmethoden lösbar. In diesem Fall werden die Lösungen numerisch bestimmt/angenähert.

Das Hornerschema

Polynomdivision



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Polynomdivision

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad n , $Q(x)$ ein Polynom vom Grad m und $n \geq m \geq 1$. Dann gibt es genau ein Polynom $F(x)$ (Quotient) vom Grad $n - m$ und genau ein Polynom $R(x)$ (Rest) mit einem Grad kleiner als m , so dass gilt:

$$P(x) = F(x) Q(x) + R(x)$$

Wir können die Polynomdivision mit Rest durchführen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Betrachten wir zum Vergleich den Algorithmus zur Division von natürlichen Zahlen mit Rest:

7295	:	13	=	561 + 2 : 13
-65				
795				
-78				
15				
-13				
2				

Dividend	Divisor	Quotient	Rest
15	: 5	= 3	0
7295	: 13	= 561	$\frac{2}{13}$

Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$\begin{aligned} 7295 &= 13 \cdot 500 + 795, \\ 795 &= 13 \cdot 60 + 15, \\ 15 &= 13 \cdot 1 + 2. \end{aligned}$$

Grundidee: Bei jedem Schritt wird die **Stellenzahl** des Restes **um eins erniedrigt**, bis der Rest kleiner als der Divisor ist. Analog dazu geht man bei Polynomen vor und erniedrigt den Grad des Restpolynoms solange um eins, bis der Rest einen kleineren Grad als der Divisor hat.



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Polynomdivision



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Wir führen folgende Polynomdivision algorithmisch durch:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 \quad \quad \quad + 3x \quad - 2) : (x^2 + 2) = x^2 - 2 + \frac{3x + 2}{x^2 + 2} \\
 \underline{-(x^4 \quad \quad + 2x^2)} \\
 -2x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{-(-2x^2 - 4)} \\
 3x + 2
 \end{array}$$

Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 3x - 2 &= x^2(x^2 + 2) - 2x^2 + 3x - 2, \\
 -2x^2 + 3x - 2 &= -2(x^2 + 2) + 3x + 2.
 \end{aligned}$$

- Dividend und Divisor nach den Potenzen in der Reihe nach „sortieren“.
- Wenn eine Potenz fehlt, schreiben Sie die fehlende Potenz als Null auf.
- Bei Polynomdivision wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.
- Division abbrechen, wenn der Rest um ein Grad kleiner als Divisor ist.

Polynomdivision

Beispiel:

$$\left(3x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1 \right) : \left(x^2 + 1 \right) =$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Polynomdivision

Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 (3x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1) : (x^2 + 1) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 2 + \frac{5x + 3}{x^2 + 1} \\
 \underline{-3x^5 - 3x^3} \\
 2x^4 - 4x^3 \\
 \underline{-2x^4 - 2x^2} \\
 -4x^3 - 2x^2 + x \\
 \underline{4x^3 + 4x} \\
 -2x^2 + 5x + 1 \\
 \underline{2x^2 + 2} \\
 5x + 3
 \end{array}$$



**Hochschule
Flensburg**
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**



Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Analog zur Primzahlenzerlegung lassen sich auch Polynome **in einzelne Faktoren zerlegen**. Wir nennen das **die Faktorisierung eines Polynoms**. Betrachten wir z.B. das Polynom $x^2 - 1$, so lautet dessen Zerlegung:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Man erkennt, dass die Division genau dann **ohne Rest** ($r = 0$) aufgeht, wenn eine **Nullstelle** x_0 des Polynoms $P(x)$ vorliegt.

Das Polynom $P(x)$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt die Nullstelle x_0 . Dann gibt es genau ein Polynom $F(x)$ vom Grad $n - 1$ mit der Eigenschaft:

$$P(x) = (x - x_0) F(x)$$

Wir sprechen von der **Abspaltung eines Linearfaktors**.



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Ist **eine Nullstelle** bekannt, so können wir durch Polynomdivision eine Teilfaktorisation erhalten.
Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$$

$\pm 1, \pm 5$

1. Finden Sie eine Nullstelle von p . Betrachte:

$$p(1) = 1 + 2 + 4 - 2 - 5 = 0$$

Also ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5 \\ \underline{- x^4 - x^3} \\ 3x^3 + 4x^2 - 2x - 5 \\ \underline{- 3x^3 - 3x^2} \\ 7x^2 - 2x - 5 \\ \underline{- 7x^2 - 7x} \\ 5x - 5 \\ \underline{- 5x + 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x} = x^3$$

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$$

$$\frac{7x^2}{x} = 7x$$



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

3. Wir können also schreiben:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + 7x + 5)$$

Nun können wir mit dem neuen Restpolynom $\tilde{p}(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$ fortfahren:

1. Finden Sie eine Nullstelle von $\tilde{p}$. Betrachte:

$$\tilde{p}(-1) = -1 + 3 - 7 + 5 = 0$$

Also ist $x_2 = -1$ eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 + 7x + 5) : (x + 1) = x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-x^3 \quad -x^2} \\ 2x^2 + 7x \\ \underline{-2x^2 \quad -2x} \\ 5x + 5 \\ \underline{-5x \quad -5} \\ 0 \end{array}$$

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2x + 5)$$

3. Wir können also schreiben:

$$\tilde{p} = (x + 1)(x^2 + 2x + 5)$$

Da die Diskriminante $D = 2^2 - 4 \cdot 5 < 0$ ist, hat das Polynom keine weiteren reellen Nullstellen (wohl aber komplexe, dazu später mehr!) und wir haben die optimale Faktorisierung mit reellen Zahlen erreicht:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)\tilde{p} \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2x + 5) \end{aligned}$$

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

1. Eine Nullstelle x_1 raten: $x_1 = 1$

2. Durch $(x - x_1)$ dividieren:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-x^2 + x} \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

3. Restliche Nullstellen bestimmen:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -6 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rightarrow x_2 = -2 \\ &\rightarrow x_3 = 3 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{-2, 1, 3\}$$

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

**Innovative
Hochschule**
Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Lösung: Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

1. Die erste Nullstelle x_1 wird „geraten“ bzw. durch Ausprobieren bestimmt. $x_1 = 1$ ist Nullstelle der Funktion.
2. Das Polynom wird durch den Faktor $(x - 1)$ dividiert. Dabei wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{-(-x^2 + x)} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-(-6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Es gilt also $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6)$

3. Nun werden die Nullstellen des sich aus der Polynomdivision ergebenden Polynoms bestimmt.

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
 x_1 &= -2, x_2 = 3
 \end{aligned}$$

Wie erhalten also die Nullstellen des Polynoms $\mathbb{L} = \{-2; 1; 3\}$.