Hochschule Flensburg

Mathematik-Vorbereitungskurs für Ingenieurstudierende

Valentina Kluge

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1. Rechengesetze

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

1. Rechengesetze

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

1.2 Körperaxiome und Rechenregeln

1.3 Brüche

1.4 Binomische Formeln

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Das griechische Alphabet

α	A	alpha	ι	I	iota	ρ	P	rho
β	B	beta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	my	υ	Y	ypsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	ny	φ	Φ	phi
ζ	Z	zeta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	eta	o	O	omikron	ψ	Ψ	psi
ϑ	Θ	theta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Relationen zwischen Zahlen

$a = b$ – „a gleich b“

$a \neq b$ – „a ungleich b“

$a < b$ – „a kleiner b“

$a > b$ – „a größer b“

$a \leq b$ – „a kleiner oder gleich b“

$a \geq b$ – „a größer oder gleich b“

$a \approx b$ – „a ungefähr gleich b“

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Logische Zeichen (zwischen Aussagen oder Aussageformen)

$A \Rightarrow B$ – „wenn A, dann B“, „aus A folgt B“

$A \Leftrightarrow B$ – „A genau dann, wenn B“, „A äquivalent (= gleichbedeutend) B“

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Mengenschreibweise

- Aufzählende Form $M_1 = \{1, 2, 3\}$
- Beschreibende Form $M_1 = \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl und } x < 4\}$

  „Menge aller x, für die gilt: x ist natürliche Zahl und $x < 4$“
- $3 \in M_1$ - „3 ist Element von M_1“
- $5 \notin M_1$ - „5 ist nicht Element von M_1“
- $\emptyset = \{\}$ – leere Menge, enthält kein Element

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Operationen mit Mengen

$M_1 \cup M_2$ - „M_1 vereinigt mit M_2“, „Vereinigungsmenge“
enthält alle Elemente, die zu M_1 **oder** M_2 gehören
(nicht ausschließendes oder)

→ Quantor „logisches ODER“: $\vee$

$M_1 \cap M_2$ - „M_1 geschnitten mit M_2“, „Schnittmenge“, „Durchschnitt“
enthält alle Elemente, die zu M_1 **und** zu M_2 gehören

→ Quantor „logisches UND“: $\wedge$

$M_1 \backslash M_2$ - „M_1 ohne M_2“, „Differenzmenge“
enthält alle Elemente, die zu M_1, aber nicht zu M_2 gehören

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Operationen mit Mengen

Beispiele:

$$M_1 = \{1, 2, 3\}$$
$$M_2 = \{2, 4, 6\}$$

Bilden Sie:

$M_1 \cup M_2 =$

$M_1 \cap M_2 =$

$M_1 \backslash M_2 =$

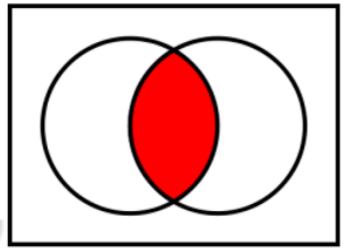
$M_2 \backslash M_1 =$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

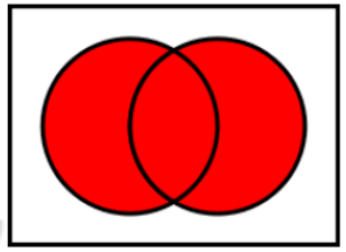
1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Operationen mit Mengen

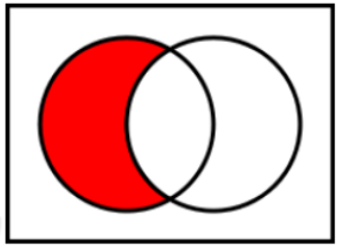
Darstellung der Mengenoperationen mit Venn-Diagrammen:



$A \quad B$



$A \quad B$



$A \quad B$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Relationen zwischen Mengen

$M_1 = M_2$ - „M_1 gleich M_2“,

M_1 und M_2 besitzen dieselben Elemente

$x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$

$M_1 \subset M_2$ - „M_1 ist Teilmenge von M_2“,

jedes Element von M_1 ist auch Element von M_2

$x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$

<u>Sonderfälle</u>: $\emptyset \subset M$, die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\mathrm{M} \subset M$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.1. Bezeichnungen und Zahlen

Zahlenmengen

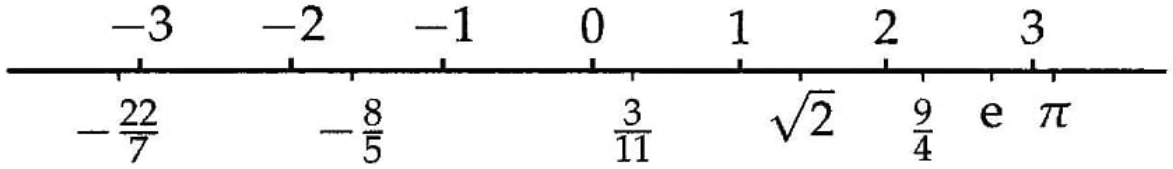
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^+$ - Menge aller natürlichen Zahlen

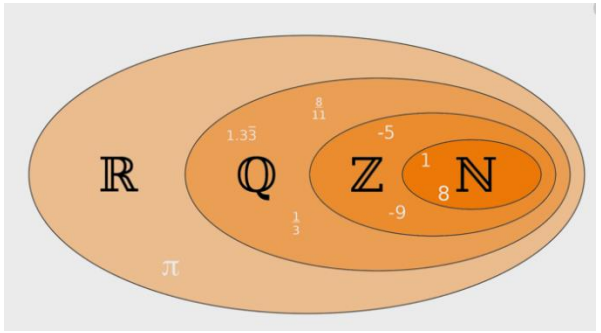
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ (nach DIN 5473)

$\mathbb{Z} = [\text{Zahl}] = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - Menge aller ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = [\text{Quotient}] = \{x | \; x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$ - Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen (aller abbrechenden und nicht abbrechenden Dezimalzahlen z.B. $-85, \; \frac{1}{3}, \; \sqrt{2}, \; 25{,}385, \pi, \dots$)





$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Addition

$a+b$	$=$	$b+a$	Kommutativgesetz (KG)	(Vertauschungsgesetz)
$(a+b)+c$	$=$	$a+(b+c)$	Assioziativgesetz (AG)	(Verbindungsgesetz)
$a+0$	$=$	a	Neutrales Element (NE)	
$a+(-a)$	$=$	0	Inverses Element (IE)	

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Multiplikation

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= b \cdot a && \text{(KG)} \\
(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) && \text{(AG)} \\
a \cdot 1 &= a && \text{(NE)} \\
a \cdot \frac{1}{a} &= 1 && \text{(IE)}
\end{aligned}
$$

$2(a \cdot b) \neq 2a \cdot 2b \rightarrow 2(a \cdot b) = 2ab$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$ → Ausmultiplizieren

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$ ← Ausklammern

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Rechenregeln der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Nur Strichrechnungen:

Rechne von links nach rechts, dann machst du nichts falsch.

$$37{,}7 - 18{,}2 + 12{,}8 = 19{,}5 + 12{,}8 = 32{,}3$$

Nur Punktrechnungen:

Rechne von links nach rechts, dann machst du nichts falsch.

$$36 : 4 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$$

Punkt- vor Strichrechnung:

Punktrechnungen werden vor Strichrechnungen ausgeführt.

$$13{,}4 + 6 \cdot 9 = 13{,}4 + 54 = 67{,}4$$

Klammern zuerst:

Was in Klammern steht, wird zuerst ausgerechnet.

$$8 \cdot (25{,}75 - 16{,}75) = 8 \cdot 9 = 72$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Produkt-Null-Satz:

$a \cdot b = 0$ *ist gleichbedeutend damit, dass einer der folgenden drei Fälle eintritt:*

1. $a = 0$ *und* $b \neq 0$
2. $b = 0$ *und* $a \neq 0$
3. $a = 0$ *und* $b = 0$

Damit ein Produkt gleich Null ist, muss mindestens einer der Faktoren gleich Null sein.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Körperaxiome

Aus den Körperaxiomen leiten sich folgende Vorzeichenregeln ab:

$$
\begin{aligned}
-(-a) &= a \\
-(a+b) &= -a-b \\
(-a)\cdot b &= -a\cdot b \\
(-a)\cdot(-b) &= a\cdot b \\
\frac{1}{-a} &= -\frac{1}{a} \text{ für } a \neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(+)\cdot(+) &= (+) \\
(-)\cdot(+) &= (-) \\
(+)\cdot(-) &= (-) \\
(-)\cdot(-) &= (+)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(+):(+) &= (+) \\
(-):(+) &= (-) \\
(+):(-) &= (-) \\
(-):(-) &= (+)
\end{aligned}
$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Beispiele

Beispiel 1:

1.) $-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3},$

2.) $-(2+5)=-2-5=-7, \text{oder} -(2+5)=-(7)=-7,$

3.) $(-3)\cdot 5=3\cdot(-5)=-(3\cdot 5)=-15,$

4.) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Beispiele

Beispiel 2:

Wo steckt der Fehler?

a) $4(3x + y) = 12x + y$

b) $8u(4v - 2w) = 32uv + 16uw$

c) $0{,}5\,a\,b + b = 0{,}5\,b\,(a + 1)$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.2. Köperaxiome und Rechenregeln

Beispiele

Beispiel 2:

Wo steckt der Fehler?

a) $4(3x + y) = 12x + y$

b) $8u(4v - 2w) = 32uv + 16uw$

c) $0{,}5\,a\,b + b = 0{,}5\,b\,(a + 1)$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

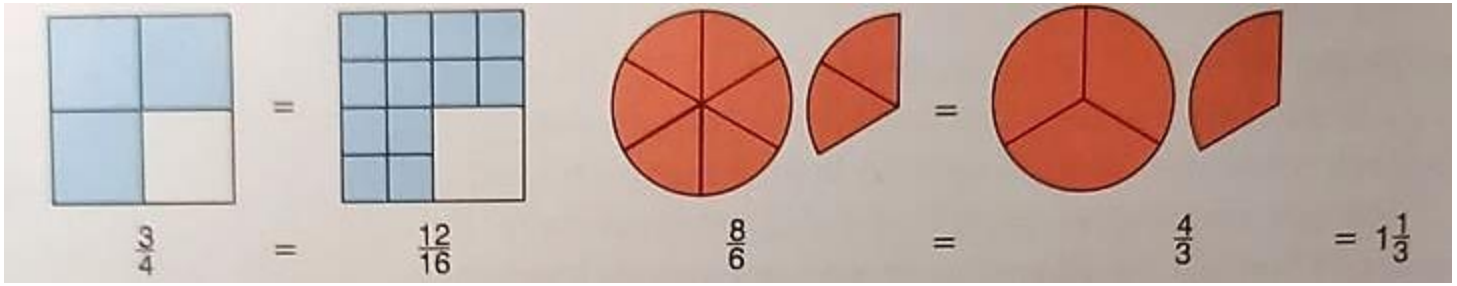
Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

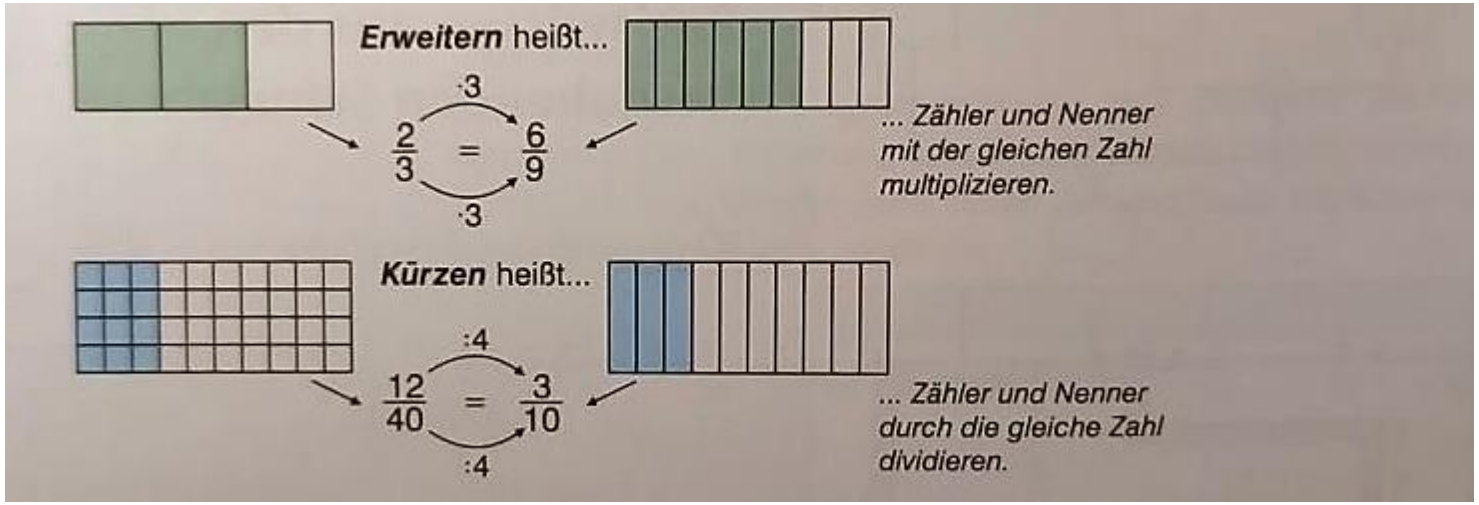
1.3. Brüche

Erweitern und Kürzen

Gleiche Brüche – verschiedene Namen:



Erweitern und Kürzen:



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Rechenregeln

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{2}{4}$$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

3) Addition von allgemeinen Brüchen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + c\cdot b}{b\cdot d} \qquad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{11}{15}$$

4) Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d} \qquad \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{8}{15}$$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch:

$$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c} \qquad 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

6) Doppelbruch:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c} \qquad \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 3} = \frac{2}{9}$$

7) Kehrwert:

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c} \qquad \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Rechenregeln

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{\frac{1}{c}}{d} = \frac{d}{c}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Rechenregeln

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{\frac{1}{c}}{d} = \frac{d}{c}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Rechenregeln

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{\frac{1}{c}}{d} = \frac{d}{c}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Rechenregeln

Für natürliche Zahlen a, b, c und d gilt:

1) Erweitern und Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c}$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3) Addition von allgemeinen Brüchen: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$

4) Multiplikation von Brüchen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c}$

6) Doppelbruch: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

7) Kehrwert: $\frac{\frac{1}{c}}{d} = \frac{d}{c}$

Kein Nenner darf gleich Null sein.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Rechenregeln

Die Rechenregeln für Brüche gelten ebenfalls, wenn im Nenner oder Zähler Brüche, reelle Zahlen oder Terme eingesetzt werden.

1) Erweitern und Kürzen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Addition von gleichnamigen Brüchen:

$$\frac{3b^3}{a^2} - \frac{4c}{a^2} = \frac{3b^3 - 4c}{a^2}$$

3) Addition von allgemeinen Brüchen:

$$\frac{3b}{a+1} + \frac{a}{2} = \frac{3b \cdot 2 + a \cdot (a+1)}{(a+1) \cdot 2} = \frac{a^2 + a + 6b}{2a+2}$$

4) Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} \cdot \frac{4}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4}{3 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{2}{5}$$

5) Multiplikation von einer ganzen Zahl mit einem Bruch:

$$(a^2 + 1) \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^2+1}{1} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{(a^2+1) \cdot 2a}{3} = \frac{2a^3 + 2a}{3}$$

6) Doppelbruch:

$$\frac{\frac{a+1}{2}}{\frac{a+1}{3}} = \frac{a+1}{2} : \frac{a+1}{3} = \frac{a+1}{2} \cdot \frac{3}{a+1} = \frac{(a+1)3}{2(a+1)} = \frac{3}{2}$$

7) Kehrwert :

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{2}a}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{2}a}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

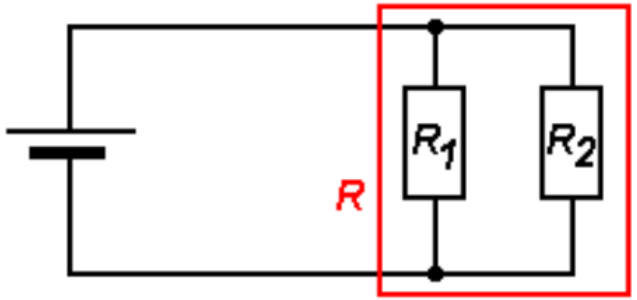
Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Beispiel

Bei der Parallelschaltung ist der **Kehrwert** des **Gesamtwiderstandes R** gleich der **Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände**. Wir betrachten eine Parallelschaltung mit zwei Einzelwiderständen R_1 und R_2 :



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Um den Gesamtwiderstand R zu bestimmen, berechnen wir den Kehrwert des Ausdrucks:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Die Widerstände R_1 und R_2 sind größer als Null. Folglich ist auch $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ von Null verschieden und wir brauchen keine Fallunterscheidung vorzunehmen. Wir erhalten:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1 R_2} + \frac{R_1}{R_1 R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

$$= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.3. Brüche

Anwendung: Umrechnen von Einheiten

Eine wichtige Anwendung der Bruchrechnung im alltäglichen Leben des Ingenieurs ist das Umrechnen von Einheiten in Ausdrücken, z.B. einer Geschwindigkeit von $\frac{cm}{s}$ in $\frac{km}{h}$.

Mit den Beziehungen $km = 10^5\, cm$ und $h = 3600 s$ und (2.1.6) ist dies einfache Bruchrechnung, z.B.

$$50\,\frac{cm}{s} = 50 \cdot \frac{\frac{km}{10^5}}{\frac{h}{3600}} = 50\,\frac{3600}{10^5}\,\frac{km}{h} = 1{,}8\,\frac{km}{h}$$

Bevor man unnötige Fehler macht, sollte man im Zweifel solche Beziehungen lieber etwas ausführlicher hinschreiben.

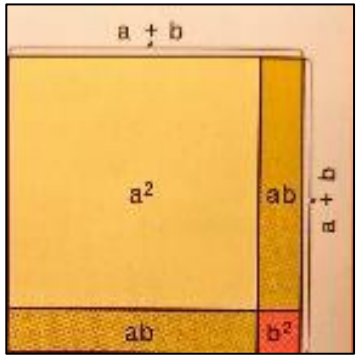
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.4. Binomische Formeln

Rechenregeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Graphische Interpretation der 1. binomischen Formel:



Wir bestätigen die binomischen Formeln durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\ &= aa + ba + ab + bb \\ &= a^2 + 2ab + b^2,\end{aligned}$$

$$(x+6)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = (a-b)a + (a-b)b \\ &= aa - ba - ab + bb \\ &= a^2 - 2ab + b^2,\end{aligned}$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)a + (a+b)(-b) \\ &= aa + ba - ab - bb \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

$$(3x+5)(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.4. Binomische Formeln

Rechenregeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Was ist hier falsch?

a) $(3x+5y)^2 = 3x^2 + 30xy + 5y^2$

b) $(1+x)(1-x) = x^2 + 1$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.4. Binomische Formeln

Binomische Formeln rückwärts (von rechts nach links)

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele:

$4x^2 + 28x + 49 = ?$

Der erste Term ist das Quadrat von $2x$:

$(2x)^2 = 4x^2$

Der dritte Term ist das Quadrat von 7:

$7^2 = 49$

Der mittlere Term ist:

$2 \cdot 2x \cdot 7 = 28x$

Also $4x^2 + 28x + 49 =$

$(2x + 7) \cdot (2x + 7) = (2x + 7)^2$

Bilden Sie binomische Formeln:

a) $100 - y^2 =$

b) $a^2 + 6ab + 9b^2 =$

c) $25x^2 - 15xy + 3y^2 =$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

1.4. Binomische Formeln

Anwendung

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Mit den binomischen Formeln berechnen wir: $1{,}001^2$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 1{,}001^2 &= \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{2}{1000} + \frac{1}{1000000} = 1 + 0{,}002 + 0{,}000001 \\ &= 1{,}002001\,. \end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

2. Elementare Gleichungen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Elementare Gleichungen

Definition

Eine Gleichung, in der die Unbekannte (z.B. x, y, z) nur **mit Zahlen** multipliziert und addiert wird, und **nicht mit sich selbst** heißt **lineare Gleichung mit einer Unbekannten**.

Ist die Gleichung linear?

a. $4x - 7 = 9$

b. $\frac{x}{-11} + 5a - 3 = x$

c. $7 + x \cdot x = 3$

d. $x(3 + 2x) = 4$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Elementare Gleichungen

Äquivalente Umformungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung bleibt unverändert, wenn folgende Rechenoperationen durchgeführt werden:

1. Addition der gleichen Zahl auf **beiden Seiten** der Gleichung
2. Multiplikation **beider Seiten** der Gleichung mit einer Zahl ungleich Null

Für eine umgeformte Gleichung der Art $a \cdot x = b$ gibt folgende drei Lösungsmöglichkeiten:

1. $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ ist die einzige Lösung.
2. $a = 0;\ b \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x = b \neq 0$, d.h. es gibt keine Lösung.
3. $a = 0;\ b = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Eindeutige Lösung

Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$2 \cdot (x + 3) = x - (1 + 3x)$$

$$2x + 6 = x - 1 - 3x$$

$$2x + 6 = -2x - 1$$

$$4x + 6 = -1$$

$$4x = -7$$

$$x = -1,75$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Eindeutige Lösung

Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$2 \cdot (x + 3) = x - (1 + 3x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 6 = x - 1 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 6 = -2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 6 = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = -7$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1,75$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Allgemeingültige Gleichungen – unendlich viele Lösungen

Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8x + 16$$

$$0 = 0$$

→ Die Gleichung ist *allgemeingültig*.
→ Jede Zahl löst die Gleichung.
→ x ist beliebig
→ $L = \mathbb{R}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Nicht-lösbare Gleichungen

Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$2(x+3) = 2(x-5)$$

$$2x + 6 = 2x - 10$$

$$6 = -10$$ falsche Aussage

→ Die Gleichung ist *nicht lösbar.*

→ Keine Zahl löst die Gleichung.

→ $L = \emptyset = \{\}$ Die Lösungsmenge ist eine leere Menge.

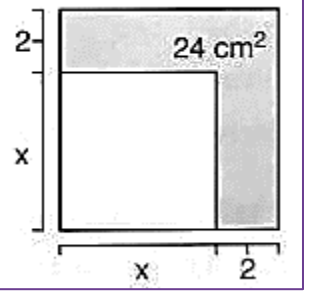
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Textaufgabe

Viele Probleme und Aufgaben kann man mit Gleichungen beschreiben und lösen. Die passende Gleichung zu finden ist dabei häufig der schwierigste Schritt.

Problem:
Die Seiten eines Quadrates werden alle um 2 cm verlängert. Dabei vergrößert sich der Flächeninhalt um 24 cm². Von welcher Seitenlänge ist man ausgegangen?



***Lösung**: Die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates beträgt 5 cm.*

Gleichung aufstellen:

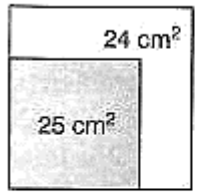
1. **Variable festlegen**
   „Die Seiten eines Quadrates …": x
2. **Passende Terme finden**
   „… werden um 2 cm verlängert.": $x + 2$
   alter Flächeninhalt: x^2
   neuer Flächeninhalt: $(x + 2)^2$
3. **Gleichung aufstellen**
   $(x + 2)^2 = x^2 + 24$

Gleichung lösen:

1. **Terme vereinfachen** (z. B. Klammern auflösen oder Terme zusammenfassen)
2. **Äquivalenzumformungen anwenden**
   - Du kannst auf beiden Seiten der Gleichung die *gleiche Zahl* oder den *gleichen Term addieren* oder *subtrahieren*.
   - Du kannst beide Seiten der Gleichung mit der *gleichen Zahl* ($\neq 0$) *multiplizieren*.
   - Du kannst beide Seiten der Gleichung durch die *gleiche Zahl* ($\neq 0$) *dividieren*.

$$
\begin{aligned}
(x+2)^2 &= x^2 + 24 && \text{Terme vereinfachen}\\
x^2 + 4x + 4 &= x^2 + 24 && |\,-x^2\\
4x + 4 &= 24 && |\,-4 \quad \text{Äquivalenzumformungen}\\
4x &= 20 && |\,:4\\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Probe:



Problemprobe

Linke Seite: Einsetzprobe
$(5 + 2)^2 = 49$
Rechte Seite:
$5^2 + 24 = 49$ Stimmt!

Lergenmüller, A. (2008): Mathematik Neue Wege 8

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Textaufgaben: Gleichungen mit Prozenten

Abnahme um 15% heißt „· 0,85“.

Zunahme um 16% heißt „· 1,16“.

Finden Sie zu den Meldungen einfache Gleichungen und lösen Sie diese:

a. Die Zahl der Wildunfälle hat um 25% auf 380 abgenommen!

b. Nach einer 10-prozentigen Preiserhöhung bieten wir nun Pauschalreisen ab 770€ an!

c. Inklusive 16% Mehrwertsteuer kostet das 58€ …

d. Zuerst haben wir den Preis für den Wagen um 20% gesenkt, vor der Werbeaktion dann aber doch noch mal um 15% erhöht. So konnten wir für 4600€ verkaufen.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

3. Anordnung und Betrag

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Anordnung

Brüche ordnen

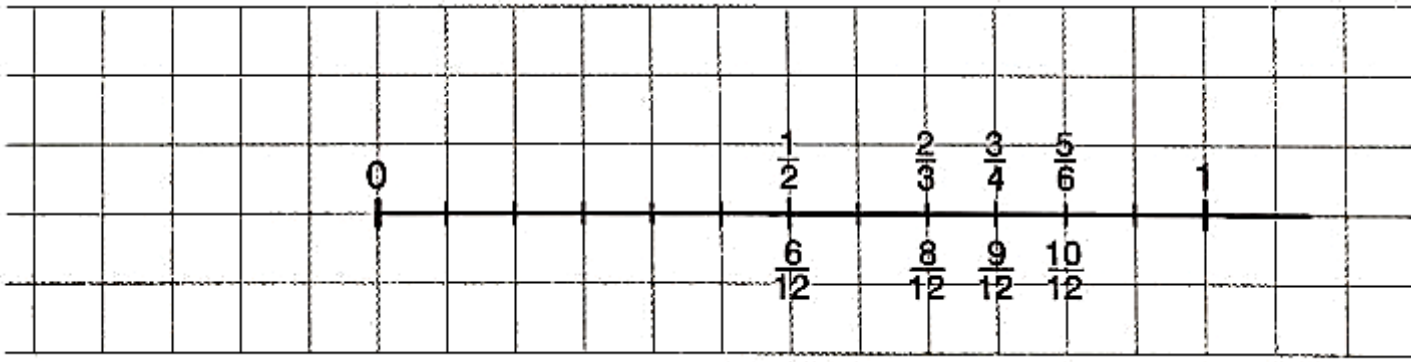
Die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) lassen sich der Größe nach ordnen:

> Für zwei reelle Zahlen trifft genau eine der folgenden drei Möglichkeiten zu:
> $$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

Eine Zahl a ist kleiner als eine Zahl b, wenn a auf der Zahlengerade links von b liegt.

Brüche gleichnamig machen und nach der Größe der Zähler ordnen.

$$\frac{2}{3}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4} \rightarrow \frac{8}{12}\ \frac{10}{12}\ \frac{6}{12}\ \frac{9}{12} \rightarrow \frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Anordnung

Gesetze

Für die **Kleiner-Relation** gelten folgende Gesetze: :

$a < b$ und $b < c$	$\Rightarrow$	$a < c$	Transitivgesetz,
$a < b$	$\Rightarrow$	$a + c < b + c$	Monotonie der Addition,
$a < b$ und $c > 0$	$\Rightarrow$	$ac < bc$	Monotonie der Multiplikation.

Wir zeigen hier die offensichtlich falsche Aussage: ''Null ist größer als jede beliebige Zahl“.
Es sei a eine beliebige positive Zahl.

$$
\begin{aligned}
a - 1 &< a && \mid \cdot(-a) \\
&\Downarrow \\
-a^2 + a &< -a^2 && \mid + a^2 \\
&\Downarrow \\
a &< 0
\end{aligned}
$$

✕ Die erste Folgerung ist unzulässig, denn hier wird mit einer negativen Zahl multipliziert und dabei ist das Ungleichheitszeichen umzudrehen.

V Die zweite Folgerung ist zulässig.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Anordnung

Ungleichungen

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer Zahl, die kleiner als Null ist, dann wird ein Kleiner-Zeichen zum Größer-Zeichen oder umgekehrt:

$$a < b \quad \text{und} \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc.$$

Welche x erfüllen die folgende Ungleichung?

$$\begin{aligned} & -3x + 1 < 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -3x < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x > -\frac{1}{3} \\ & \mathbb{L} = \left(x | x > -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

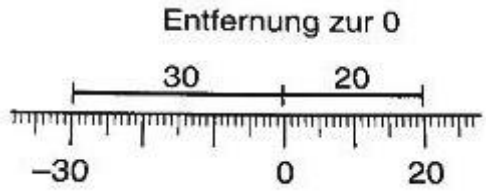
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Betrag

Definition und Eigenschaften

Für den Betrag einer Zahl a gilt folgendes:

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0, \\ -a & , a < 0. \end{cases}$$



Der Betrag einer Zahl gibt an, wie weit sie von der 0 entfernt ist. Der Betrag ist nie negativ.

Eigenschaften des Betrags

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Betrag

Betragsgleichungen

Der Betrag $|a-b|$ gibt den Abstand von a zu b an. Ist $a \geq b$, so ist der Abstand gleich $a-b$. Ist jedoch $b > a$, so ist der Abstand gleich $b-a$. Durch den Betrag werden beide Fälle zusammengefasst:

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0, \\ -a & , a < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geq b, \\ -(a-b) = b-a, & a < b. \end{cases}$$

Beispiel 1: Welche x erfüllen die Gleichung $|x-3| = 1$?

Offensichtlich werden gerade die Zahlen gesucht, die von der Zahl 3 den Abstand 1 besitzen.
Geht man also von 3 um 1 nach links bzw. rechts, so erhält man die Lösungen $x = 2$ und $x = 4$.

Mit der Definition des Betrags rechnen wir nach:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3, \\ -(x-3) = -x+3, & x < 3. \end{cases}$$

Für $x \geq 3$ lautet die Gleichung: $x - 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$

Für $x < 3$ lautet die Gleichung: $-x + 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

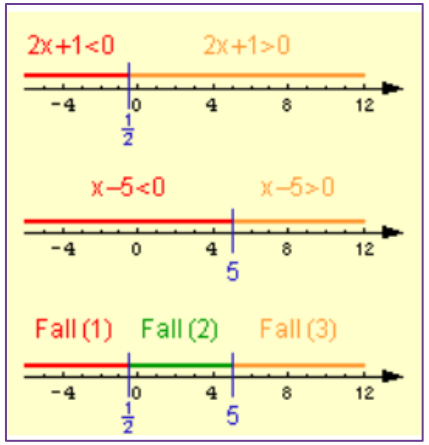
Betrag

Betragsgleichungen

Beispiel 2: Welche x erfüllen die Gleichung $3|2x+1| = |x-5|$?

Um die Betragsstriche mit Hilfe der Definition aufzulösen, berechnen wir zunächst:

$$2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x-5 = 0 \iff x = 5$$



Im Fall (1) lautet die Gleichung:

$$3(-(2x+1)) = -(x-5) \iff 5x = -8 \iff x = -\frac{8}{5}.$$

Im Fall (2) lautet die Gleichung:

$$3(2x+1) = -(x-5) \iff -7x = -2 \iff x = \frac{2}{7}.$$

Im Fall (3) lautet die Gleichung:

$$3(2x+1) = x-5 \iff -5x = 8 \iff x = -\frac{8}{5}.$$

Wir unterscheiden also die drei Fälle

(1) $x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x+1 < 0$ und $x-5 < 0$,

(2) $-\frac{1}{2} \le x < 5 \Rightarrow 2x+1 \ge 0$ und $x-5 < 0$,

(3) $x \ge 5 \Rightarrow 2x+1 \ge 0$ und $x-5 \ge 0$.

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{8}{5}; \frac{2}{7}\right\}.$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Intervalle

Definition

Ein **Intervall** besteht aus allen Zahlen, die zwischen den im Intervall angegebenen Grenzen liegen. Je nach Art der Klammern gehören die Grenzen dazu oder nicht. Für $a < b$ existieren folgende Intervalle:

- abgeschlossen: $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- offen: $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- links halboffen: $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- rechts halboffen: $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4. Potenzen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

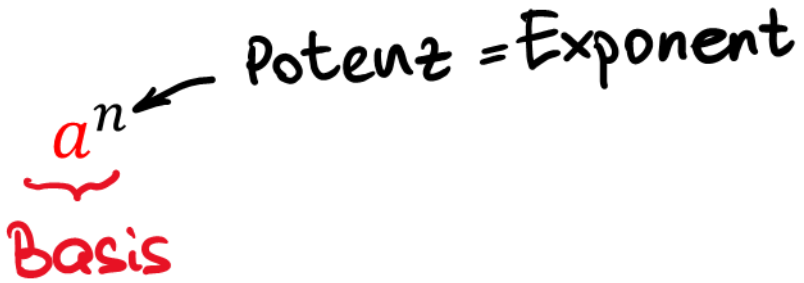
Definition

Produkte mit gleichen Faktoren:

$$\begin{aligned} 3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \\ (-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243} \end{aligned}$$

Allgemein schreibt man Mehrfachprodukte als Potenzen:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, \quad a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$



Für $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Sonderfälle: $a^0 = 1$, $0^n = 0$, $1^n = 1$

Vorsicht:

0^0 ist nicht definiert!

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Multiplikation

Potenzen mit gleicher Basis

$$a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

Allgemein gilt, Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten der Faktoren potenziert:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-faches Produkt}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m-faches Produkt}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n+m-faches Produkt}},$$

Beispiele:

$$5a^6 \cdot 7a^3 \cdot 3a = 105a^{10}$$

$$a^3 \cdot a^4 = a^7$$

$$(a+b)^{n-3} \cdot (a+b)^{5-n} = (a+b)^2$$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Multiplikation

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

$$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = (ab)(ab)(ab) = (ab)^3$$

Allgemein gilt, Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-faches Produkt}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n-faches Produkt}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{\text{n-faches Produkt}},$$

Beispiele:

$$(x+1)^2 \cdot (x-1)^2 = \big((x+1)(x-1)\big)^2 = (x^2-1)^2$$

$$-8x^3y^3 = (-2)^3 x^3 y^3 = (-2xy)^3$$

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Multiplikation

Vorsicht

Für die allgemeine Multiplikation von Potenzen, die weder eine gleiche Basis noch einen gleichen Exponenten haben, lässt sich **keine** allgemeine Umformung angeben.

z.B. $3^5 \cdot 4^2$ ist ungleich(!) $(3 \cdot 4)^{5+2}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Negative Exponenten

Wir setzen zur Abkürzung:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = (a^{-1})^n, \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Potenzgesetze

Nun können wir mit ganzzahligen Potenzen rechnen und halten folgende Regeln fest.

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

Potenzieren einer Potenz:

$$(a^n)^m = a^{n\,m}.$$

n und m sind ganze Zahlen. Division durch Null muss ausgeschlossen werden.

⚠ $a^5 - a^3 \neq a^2$

$a^2 + a^5$ geht nicht

$a^2 + b^2$ geht nicht

Für Summen keine Regeln!

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Beispiele

Wir vereinfachen:

$$\frac{3^{-4}}{3^{-9}} = 3^{-4-(-9)} = 3^5,$$

$$\frac{3^6}{\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \left(\frac{3}{\frac{1}{3}}\right)^6 = 9^6.$$

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^3 (ab)^4 + 3\,\frac{(ab)^2}{b^2} = (-1)^3\left(\frac{1}{a}\right)^3 a^4 b^4 + 3\,\frac{a^2 b^2}{b^2}$$

$$= -\frac{a^4 b^4}{a^3} + 3a^2$$

$$= a(3a - b^4),$$

$$\frac{9a-3b}{9b^2-81a^2} = \frac{9a-3b}{(-1)((9a)^2-(3b)^2)}$$

$$= -\frac{9a-3b}{(9a+3b)(9a-3b)}$$

$$= -\frac{1}{9a+3b}.$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{und} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$$

Potenzieren einer Potenz:

$$(a^n)^m = a^{n\,m}.$$

n und m sind ganze Zahlen. Division durch Null muss ausgeschlossen werden.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Sei n eine natürliche Zahl und $a \geq 0$ eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Zahl b, welche größer oder gleich Null ist und deren n-te Potenz a ergibt, mit $\sqrt[n]{a}$:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^n \quad (a, b \geq 0)\,.$$

Sprechweise: n-te Wurzel aus a.

Die **n-te Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ ist diejenige (positive) Zahl, die mit n potenziert a ergibt, d.h. für die n-te Wurzel gilt folgende Definitionsgleichung:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, a \geq 0$$

Spezialfälle: $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$: Kubikwurzel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

n-te Wurzel

Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, b > 0\,.$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Quadratwurzeln

Sei $a \geq 0$. Wir bezeichnen die Zahl b, welche größer oder gleich Null ist und deren Quadrat a ergibt, mit $\sqrt{a}$ (**Quadratwurzel** aus a):

$$\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b^2 \qquad (a, b \geq 0)\,.$$

Es gilt z.B. $\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{4} = 2,\ \sqrt{10000} = 100,\ \sqrt{0,04} = 0,2$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|\,.$$

Es gilt im Allgemeinen nicht: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Vereinfachen Sie

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, b > 0,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Es gilt im Allgemeinen nicht: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13, \quad \left(\sqrt{13}\right)^3 = 13\sqrt{13},$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} \frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{8+2\sqrt{8}\sqrt{5}+5}{8-5} \\
&= \frac{13+2\sqrt{4\cdot 2}\sqrt{5}}{3} \\
&= \frac{13+2\cdot 2\sqrt{2\cdot 5}}{3} \\
&= \frac{13+4\sqrt{10}}{3}.
\end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beispiele: Rationalisieren des Nenners

1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{4}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten

Wir schreiben Wurzeln auch als Potenzen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},$$

Damit ergibt sich $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1$

Potenzen mit rationalen Exponenten werden eingeführt durch:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$.

Beispiele:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2}$$

$$\sqrt[3]{a^5} \cdot \left(\sqrt{a}\right)^3 = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{19}{6}} = \sqrt[6]{a^{19}}$$

Alle Regeln der Potenzrechnung gelten auch für das Rechnen mit rationalen bzw. reellen Exponente (Wurzeln). Für rationale Exponenten p, q und Basen $a, b > 0$ gilt:

1.) $a^p a^q = a^{p+q}$,
2.) $(a^p)^q = a^{p\,q}$,
3.) $a^p b^p = (ab)^p$,
4.) $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$,
5.) $a^p a^{-p} = 1$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$.

Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke bzw. schreiben Sie die Ausdrücke als Potenzen:

1	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a}$
2	$az \div \sqrt{\frac{a}{z}}$
3	$\sqrt[3]{27^2}$
4	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y}{x}}$
5	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

1. „Addition und Subtraktion der Wurzeln“.

   Vereinfachen Sie:

   $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} =$

2. Multiplikation und Division von gleichnamigen Wurzeln:

   a. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} =$

   b. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} =$

3. Teilweises Wurzelziehen:

   $\sqrt{5 \cdot x^2 y^3} =$

4. Unter die Wurzel bringen:

   $x \cdot \sqrt[4]{a} =$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Beliebige rationale Exponenten - Aufgaben

5. Schreiben Sie als eine Wurzel:

   a. $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{5}} =$

   b. $\sqrt[3]{\sqrt{4}} =$

6. Schreiben Sie als n-te Wurzel:

   a. $2^{\frac{1}{2}} =$

   b. $7^{\frac{2}{3}} =$

   c. $9^{-\frac{2}{5}} =$

7. Schreiben Sie als Potenz von 2:

   a. $\sqrt[3]{4} =$

   b. $\sqrt[6]{16} =$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Unbekannte Variable steht in einer ganzzahligen Potenz:

$$x^n = b, \qquad b > 0$$

1. **Gerade** Exponenten:

   → Die Potenzgleichung besitzt zwei Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{b}$$

   da es $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ für n gerade gilt.

Beispiele: *Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen*

a. $x^6 = 64 \Rightarrow \sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{64} \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

b. $x^2 = -4 \Rightarrow$ keine Lösung in reellen Zahlen $L = \{\,\}$

4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Unbekannte Variable steht in einer ganzzahligen Potenz:

$$x^n = b, \qquad b > 0$$

2. Ungerade Exponenten:

→ Die Potenzgleichung besitzt einzige Lösung:

- ✓ $x = \sqrt[n]{b}$, wenn $b > 0$
- ✓ $x = -\sqrt[n]{b}$, wenn $b < 0$

Beispiele: *Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen*

a. $x^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$, da $\sqrt[n]{x^n} = x$ für x ungerade $\Rightarrow x = 2$ und $L = \{2\}$

b. $x^3 = -8$

Wenn wir hier die Wurzel ziehen, stoßen wir auf ein Problem, dass Radizieren ist für negative Radikanden nicht definiert ist! → Siehe weiter

4.3 Elementare Potenzgleichungen

Gleichungen mit ganzzahligen Exponenten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

$$x^3 = -8 \text{ ??}$$

Wir wenden einen Trick an, um das negative Vorzeichen zu beseitigen: Wir quadrieren.

$$\begin{aligned}
x^3 &= -8 && \mid \text{Quadrieren} \\
(x^3)^2 &= (-8)^2 \\
x^6 &= 64 && \mid \sqrt[6]{} \\
\sqrt[6]{x^6} &= \sqrt[6]{64} && \mid \text{Da } n \text{ gerade ist, gilt: } \sqrt[n]{x^n} = |x| \\
|x| &= 2 \\
x &= \pm 2
\end{aligned}$$

Um Scheinlösungen auszusortieren, machen wir die Probe:

$$\begin{aligned}
x^3 &= -8 && \mid x_1 = -2 \\
(-2)^3 &= -8 \\
-8 &= -8 && \text{Wahre Aussage!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3 &= -8 && \mid x_2 = 2 \\
2^3 &= -8 \\
8 &= -8 && \text{Falsche Aussage!}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{-2\}.$$

https://www.mathebibel.de/potenzgleichungen

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5. Quadratische Gleichungen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

5.1 Reinquadratische Gleichungen

$ax^2 + c = 0\,, a \neq 0$

Die reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$ lässt sich durch äquivalente Umformungen in folgende Form bringen:

$$ax^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a}$$

1. $-\frac{c}{a} > 0$: zwei Lösungen $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$;
2. $-\frac{c}{a} < 0$: nicht lösbar in $\mathbb{R}$; $L = \{\}$;
3. $c = 0$: einzige Lösung $x = 0$

Beispiele:

a) $4x^2 - 121 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 121 \Leftrightarrow x^2 = \frac{121}{4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{121}{4}} = \pm\frac{11}{2}$$

b) $\sqrt{2}x^2 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{2}}$$

c) $x^2 + 64 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -64 \Rightarrow$ keine reelle Lösung

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.2 Spezielle quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx = 0\,,\ a, b \neq 0$

Die Lösungen der speziellen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx = 0$ ergeben sich durch **Ausklammern**:

$$x\,(ax\ +\ b)\ =\ 0$$

Nach „Produkt-Null-Satz“ ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$) ergibt sich, dass entweder $x = 0$ oder $ax + b = 0$.

Die Lösungen sind deshalb $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Beispiel: $x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x - 3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

$L = \{0, 3\}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

Manchmal ist es erforderlich einen Ausdruck in die Form eines Binoms zu bringen (z.B. quadratische Form einer verschobenen Parabel).

Dies geschieht mit Hilfe des 2. Binoms, indem es „rückwärts“ angewendet wird.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Durch quadratische Ergänzung wird der Term $ax^2 + bx + c = 0$ als **Summe** eines mit einem **Faktor** versehenen **Quadrats** und einem **konstanten Anteil** dargestellt:

i. **Normalform: $x^2 + dx + c$,** für $a = 1$

$$x^2+dx+c = x^2+dx+\frac{d^2}{4}-\frac{d^2}{4}+c = \left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(c-\frac{d^2}{4}\right)$$

Beispiele:

$$x^2+2x+3 = \left(x^2+2x+\frac{2^2}{4}\right)+\left(3-\frac{2^2}{4}\right) = \left(x^2+2x+1\right)+2 = (x+1)^2+2$$

$$x^2-4x+7 = \left(x^2-4x+\frac{(-4)^2}{4}\right)+\left(7-\frac{(-4)^2}{4}\right) = \left(x^2-4x+4\right)+(7-4) = (x-2)^2+3$$

Weiter: die Nullstellen direkt berechnen wie in der reinquadratischen Gleichung!

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

ii. Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Wir prüfen mit der binomischen Formel nach:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Beispiel: Wir formen den Term $-3x^2 + x - 5$ durch quadratische Ergänzung um und berechnen die Nullstellen:

$$\begin{aligned} -3x^2 + x - 5 &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) - 5 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6^2}\right) - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{6^2} - 5 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{59}{12}. \end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1. Lösungsmethode „quadratische Ergänzung“

ii. Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Aufgabe: Formen Sie folgenden Term mit quadratischer Ergänzung um:

$$-\frac{5}{2}x^2 + x - 9$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

2. Lösungsmethode „Mitternachtsformel“ oder „abc-Form“

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad \textbf{mit Diskriminante } D = b^2 - 4ac$$

Die Anzahl der Lösungen hängt von *D* ab:

i. Für $D > 0$ gibt es zwei Lösungen;

ii. Für $D = 0$ gibt es eine Lösung;

iii. Für $D < 0$ gibt es keine Lösungen: $L = \{\,\}$

Beispiel: $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 9 - 4 = 5 > 0$ → es gibt zwei Lösungen

$\Rightarrow x_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 - \sqrt{5} \ \wedge\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 + \sqrt{5}$

$$L = \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

3. Lösungsmethode „pq-Formel“ (Sonderfall von „abc-Form“)

Nur für Normalform $x^2 + px + q$ mit $a = 1$ gültig:

Beispiel: Wir lösen die folgende Gleichung mit *quadratischer Ergänzung* und direkt mit der pq-Formel:

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

a. Quadratische Ergänzung ergibt:
$x^2 - 6x + 9 - 9 + 4 = 0$
bzw. $(x - 3)^2 = 5$

b. Mit $p = -6$ und $q = 4$ bekommen wir:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 3 \pm \sqrt{5}\,.$$

pq-Formel: Wenn die Diskriminante d nichtnegativ ist:

$$d = (\frac{p}{2})^2 - q \geq 0$$

hat die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zwei reelle Lösungen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Falls $d = 0$ ist, fallen die Lösungen zu einer einzigen zusammen.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

4. Lösungsmethode „Satz von Vieta“ (1540-1603)

Nur für Normalform $x^2 + px + q$ mit $a = 1$ gültig:

> Satz von Vieta Sei $(\frac{p}{4})^2 - q \geq 0$, dann besitzt die Gleichung
>
> $$x^2 + px + q = 0$$
>
> zwei Nullstellen x_1 und x_2. Es gilt
>
> $$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$
>
> und
>
> $$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Beispiel 1: Gesucht ist die Normalform der quadratischen Gleichung, welche die folgenden Lösungen besitzt :

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Lösung: Nach Satz von Vieta gilt

$p = -(x_1 + x_2) = -\left(1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}\right) = -2$

$q = x_1 \cdot x_2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) = 1 - 2 = -1$

$\Rightarrow$ Normalform lautet: $x^2 - 2x - 1 = 0$

Beispiel 2:

$x^2 - 12x + 35 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 12$

$\quad\quad x_1 \cdot x_2 = 35$

$\Leftrightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 5$

$\Rightarrow L = \{5, 7\}$

Beispiel 3:

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -1$

$\quad\quad x_1 \cdot x_2 = -2$

$\Leftrightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 1$

$\Rightarrow L = \{-2, 1\}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

5.3 Allgemeine quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a, b, c \neq 0$

5. Sonderfälle

Beispiel

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_2 = -1, \quad x_3 = -3$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 0\}$$

Beispiel:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \qquad \textit{Substitution}: \quad z = x^2$$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$z_1 = \frac{10 + 8}{2} = 9 \qquad x^2 = z_1 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$$

$$z_2 = \frac{10 - 8}{2} = 1 \qquad x^2 = z_2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

$$\mathbf{L} = \{-3, -1, 1, 3\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

6. Wurzelgleichungen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Allgemeine Gleichungen

Neben den bisher beschriebenen (Standard-)Formen können Gleichungen natürlich auch jede andere mathematische Form haben.

Beispiele:

$$\ln x - \ln x^2 = 5,$$

$$\sqrt{x+3} = 2 + 5x$$

$$\sin x = \frac{x}{2}$$

Indem man die linke Seite einer Gleichung auf die rechte Seite bringt, erhält man folgende Aussage:

Die allgemeinste Form einer Gleichung ist $f(x) = 0$
Dies bedeutet:
Das Lösen einer Gleichung entspricht der Suche nach den Nullstellen einer Funktion.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Definition und Lösungsweg

Gleichungen mit Wurzel, in **deren Radikanden die Unbekannte x** vorkommt, heißen Wurzelgleichungen.

Falls nur eine Wurzel der Form $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ auftritt und außerhalb der Wurzel die Unbekannte x nur linear vorkommt, bietet sich folgender Lösungsweg an:

1. Man bringe die Wurzel auf eine Seite.
2. Man quadriere beide Seiten der umgeformten Gleichung.

   ! Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, da durch das Quadrieren kommt eine Lösung dazu.
3. Man Löse die entstehende Gleichung.
4. Man überprüfe, welche der Lösungen die Ausgangsgleichung tatsächlich erfüllt → Probe!

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

1.

$$
\begin{aligned}
& 14 - \sqrt{x^2 + x - 14} = 2x \\
\Leftrightarrow \quad & 14 - 2x = \sqrt{x^2 + x - 14} \,|\, ()^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (14 - 2x)^2 = x^2 + x - 14 \\
\Leftrightarrow \quad & 196 - 56x + 4x^2 = x^2 + x - 14 \\
\Leftrightarrow \quad & 3x^2 - 57x + 210 = 0 \,|\, : 3 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 19x + 70 = 0 \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4} - 70} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{19}{2} \pm \frac{9}{2} \\
& x_1 = 5,\ x_2 = 14
\end{aligned}
$$

Probe :

$$14 - \sqrt{14^2 + 14 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 14$$

$$14 - 14 \neq 28$$

$$14 - \sqrt{5^2 + 5 - 14} \stackrel{?}{=} 2 \cdot 5$$

$$14 - 4 = 10$$

Das heißt, $x_1 = 5$ erfüllt die Gleichung, wohingegen $x_2 = 14$ nicht als Lösung in Frage kommt.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

2.

$$1 - x = \sqrt{5x - 11} \,|\, ()^2$$
$$(1 - x)^2 = 5x - 11$$
$$1 - 2x + x^2 = 5x - 11$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = 4$$

Probe :

$$1 - 3 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 3 - 11}$$
$$-2 \neq 2$$

$$1 - 4 \stackrel{?}{=} \sqrt{5 \cdot 4 - 11}$$
$$-3 \neq 3$$

Weder $x_1 = 3$ noch $x_2 = 4$ erfüllen die Gleichung.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

7. Gleichungen n-ten Grades

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Polynome

Eine **Gleichung n-ten Grades** oder **Polynom vom Grad n** ist eine Summe von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten. Allgemein schreibt man:

$$P_n(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

Die Parameter a_k werden dabei als **Koeffizienten** bezeichnet.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele:

1. Polynom 4. Grades:

$$P(x) = 3\,x^4 - 2\,x^2 + x\,,$$

2. Polynom 3. Grades:

$$P(x) = 3\,x^3 - 2\,x - 1$$

3. Polynom 1. Grades (Gerade):

$$P(x) = -3\,x + 2$$

Polynome

Polynome können wir addieren:

Durch die Addition von Polynomen entsteht wieder ein Polynom. Addieren wir die Polynome

$$P(x) = 3\,x^3 - 2\,x - 1 \quad \text{und} \quad Q(x) = -4\,x^4 + 2\,x^3 - 3\,x + 2\,,$$

so entsteht das Polynom

$$P(x) + Q(x) = 3\,x^3 - 2\,x - 1 - 4\,x^4 + 2\,x^3 - 3\,x + 2 = -4\,x^4 + 5\,x^3 - 5\,x + 1\,.$$

Polynome können wir dividieren.
Wie bei den **ganzen Zahlen** kann eine **Division aufgehen** oder es kann ein **Rest** bleiben.
Ähnliches gilt nun für Polynome. Offensichtlich enthält das Polynom:

$$P(x) = x^2 + 2\,x + 1 = (x+1)^2$$

das Polynom $Q(x) = x + 1$ als Teiler:

$$\frac{x^2 + 2\,x + 1}{x + 1} = x + 1\,.$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Nullstellen

Die Lösungen der Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ stellen die Nullstellen des Polynoms $f(x)$ dar. Für Polynome vom Grad $n \geq 3$ sind die Nullstellen häufig nicht mit elementaren Rechenmethoden lösbar. In diesem Fall werden die Lösungen numerisch bestimmt/angenähert.

Das Hornerschema

Polynomdivision

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Polynomdivision

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad n, $Q(x)$ ein Polynom vom Grad m und $n \geq m \geq 1$. Dann gibt es genau ein Polynom $F(x)$ (Quotient) vom Grad $n-m$ und genau ein Polynom $R(x)$ (Rest) mit einem Grad kleiner als m, so dass gilt:

$$P(x) = F(x)\,Q(x) + R(x)$$

Wir können die Polynomdivision mit Rest durchführen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,.$$

Betrachten wir zum Vergleich den Algorithmus zur Division von natürlichen Zahlen mit Rest:

$$\begin{array}{rcl} 7295 & : & 13 \quad = 561 + 2 : 13 \\ -65 & & \\ \hline 795 & & \\ -78 & & \\ \hline 15 & & \\ -13 & & \\ \hline 2 & & \end{array}$$

Dividend	Divisor	Quotient	Rest
15	: 5	= 3	0
7295	:13	= 561	$\frac{2}{13}$

Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$\begin{aligned} 7295 &= 13 \cdot 500 + 795\,, \\ 795 &= 13 \cdot 60 + 15\,, \\ 15 &= 13 \cdot 1 + 2\,. \end{aligned}$$

Grundidee: Bei jedem Schritt wird die **Stellenzahl** des Restes **um eins erniedrigt**, bis der Rest kleiner als der Divisor ist. Analog dazu geht man bei Polynomen vor und erniedrigt den Grad des Restpolynoms solange um eins, bis der Rest einen kleineren Grad als der Divisor hat.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Polynomdivision

Wir führen folgende Polynomdivision algorithmisch durch:

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^4 & & +3\,x & -2) & : \; \boxed{(x^2} + 2) = x^2 - 2 + \dfrac{3\,x+2}{x^2+2} \\
-(x^4 & +2\,x^2) & & & \\
\hline
 & \boxed{-2\,x^2} & \boxed{+3\,x} & \boxed{-2} & \\
 & -(-2\,x^2 & & -4) & \\
\hline
 & & 3\,x & +2 &
\end{array}
$$

Wir haben damit folgende Gleichungen schematisch erfasst:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 3\,x - 2 &= x^2\,(x^2+2) \boxed{-2\,x^2 + 3\,x - 2\,,} \\
\boxed{-2\,x^2 + 3\,x - 2} &= -2\,(x^2+2) + 3\,x + 2\,.
\end{aligned}
$$

- Dividend und Divisor nach den Potenzen in der Reihe nach „sortieren“.
- Wenn eine Potenz fehlt, schreiben Sie die fehlende Potenz als Null auf.
- Bei Polynomdivision wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.
- Division abbrechen, wenn der Rest um ein Grad kleiner als Divisor ist.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Polynomdivision

Beispiel:

$$\left(\quad 3x^5 + 2x^4 \quad - x^3 \qquad + x + 1\right) : \left(x^2 + 1\right) =$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Polynomdivision

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiel:

$$
\begin{array}{l}
\left(3x^5 + 2x^4 - x^3 \qquad + x + 1 \right) : \left(x^2 + 1 \right) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 2 + \dfrac{5x+3}{x^2+1} \\
\underline{-\,3x^5 \qquad\quad - 3x^3} \\
\qquad\qquad 2x^4 - 4x^3 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x^4 \qquad\quad - 2x^2} \\
\qquad\qquad\qquad - 4x^3 - 2x^2 \; + x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\quad 4x^3 \qquad\quad + 4x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 2x^2 + 5x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\quad 2x^2 \qquad\quad + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5x + 3
\end{array}
$$

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Analog zur Primzahlenzerlegung lassen sich auch Polynome **in einzelne Faktoren zerlegen**. Wir nennen das die Faktorisierung eines Polynoms. Betrachten wir z.B. das Polynom $x^2 - 1$, so lautet dessen Zerlegung:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Man erkennt, dass die Division genau dann **ohne Rest** $(r = 0)$ aufgeht, wenn eine **Nullstelle x_0** des Polynoms $P(x)$ vorliegt.

Das Polynom $P(x)$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt die Nullstelle x_0 . Dann gibt es genau ein Polynom $F(x)$ vom Grad $n - 1$ mit der Eigenschaft:

$$P(x) = (x - x_0)\, F(x)$$

Wir sprechen von der Abspaltung eines Linearfaktors.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Ist eine Nullstelle bekannt, so können wir durch Polynomdivision eine Teilfaktorisierung erhalten. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$$

1. Finden Sie eine Nullstelle von p. Betrachte:

   $$p(1) = 1 + 2 + 4 - 2 - 5 = 0$$

   Also ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

   $$\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 \right) : \left(x - 1 \right) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

3. Wir können also schreiben:

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 7x + 5)$$

Nun können wir mit dem neuen Restpolynom $\tilde{p}(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$ fortfahren:

1. Finden Sie eine Nullstelle von $\tilde{p}$. Betrachte:

$$\tilde{p}(-1) = -1 + 3 - 7 + 5 = 0$$

   Also ist $x_2 = -1$ eine Nullstelle.

2. Polynomdivision:

$$\begin{array}{rl} \left(x^3 + 3x^2 + 7x + 5\right) : \left(x+1\right) = x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ 2x^2 + 7x \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ 5x + 5 \\ \underline{-5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

3. Wir können also schreiben:

$$\tilde{p} = (x+1)(x^2 + 2x + 5)$$

Da die Diskriminante $D = 2^2 - 4 \cdot 5 < 0$ ist, hat das Polynom keine weiteren reellen Nullstellen (wohl aber komplexe, dazu später mehr!) und wir haben die optimale Faktorisierung mit reellen Zahlen erreicht:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)\tilde{p} \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 5) \end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Aufgabe: *Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$

1. Eine Nullstelle x_1 raten:

2. Durch $(x - x_1)$ dividieren:

3. Restliche Nullstellen bestimmen:

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Bestimmung der Nullstellen mit Polynomdivision

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Lösung: *Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

1. *Die erste Nullstelle* x_1 *wird „geraten" bzw. durch Ausprobieren bestimmt.* $x_1 = 1$ *ist Nullstelle der Funktion.*

2. *Das Polynom wird durch den Faktor* $(x-1)$ *dividiert. Dabei wird wie beim schriftlichen Dividieren zweier natürlicher Zahlen vorgegangen.*

$$
\begin{array}{rl}
\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) & : (x-1) = \quad x^2 - x - 6 \\
\underline{-\left(x^3 - x^2\right)} & \\
-x^2 - 5x & \\
\underline{-\left(-x^2 + x\right)} & \\
-6x + 6 & \\
\underline{-(-6x + 6)} & \\
0 &
\end{array}
$$

Es gilt also $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1) \cdot \left(x^2 - x - 6\right)$

3. *Nun werden die Nullstellen des sich aus der Polynomdivision ergebenden Polynoms bestimmt.*

$$
\begin{aligned}
x^2 - x - 6 &= 0 \\
\Rightarrow \quad x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_1 &= -2,\ x_2 = 3
\end{aligned}
$$

Wie erhalten also die Nullstellen des Polynoms $\mathbb{L} = \{-2; 1; 3\}$.

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8. Logarithmen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

8.1 Rechengesetze

Definition

Wir erheben **2** zur **3**. Potenz → $2^3 = 8$

Wie können wir dieses Potenzieren von 2 umkehren?

1. Man fragt nach **Basis** x, welche, zur 3. Potenz erhoben, den Wert 8 ergibt:

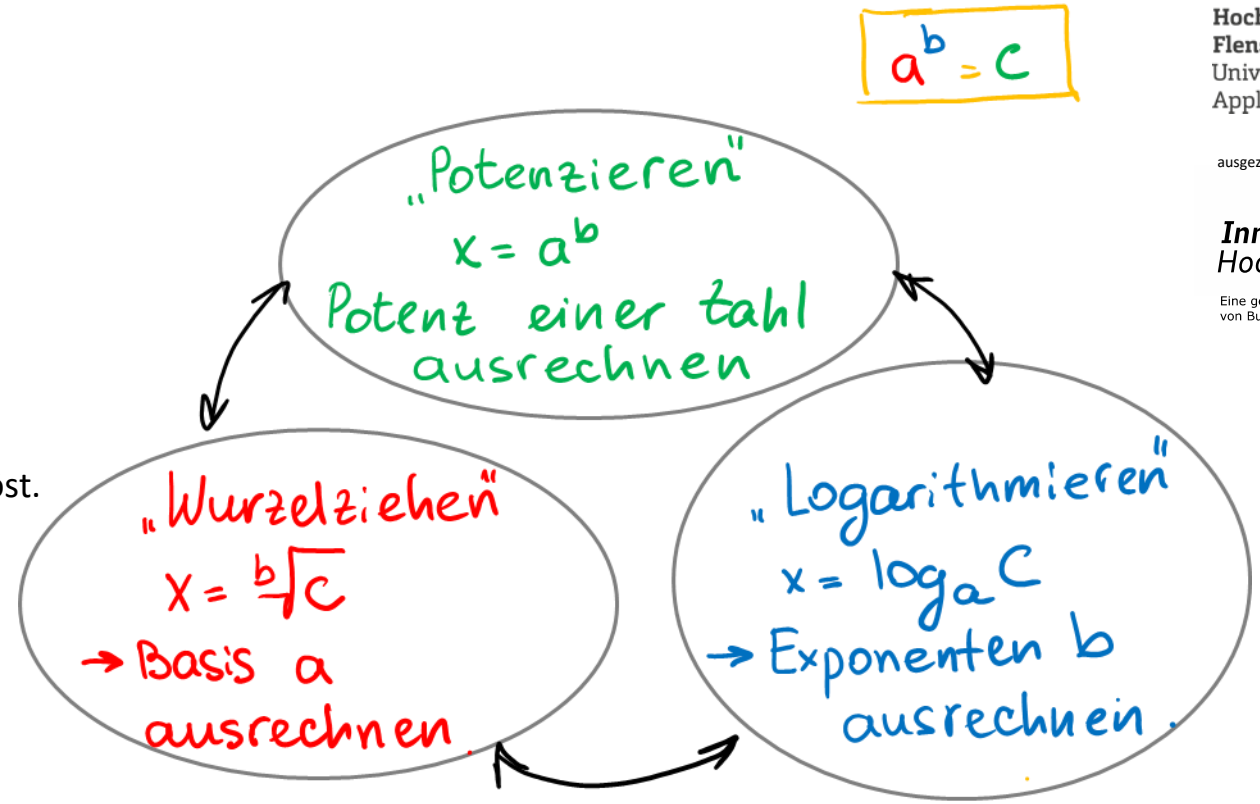
   $$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8}$$

   Solche Aufgaben werden mit **Radizieren (Wurzelziehen)** gelöst.

2. Man fragt nach dem **Exponenten** x, mit welchem die Basis 2 potenziert werden soll, um den Wert 8 zu ergeben:

   $$2^x = 8 \Rightarrow x = \log_2 8$$

   Solche Aufgaben werden durch **Logarithmieren** gelöst:



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8.1 Rechengesetze

Definition

Fragestellung:

Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen:

Für jedes $a, b > 0$ mit $a \neq 1$ hat die Gleichung $a^x = b$ genau die eine Lösung $x = \log_a b$ (sprich: „Logarithmus von b zur Basis a“). Das Ergebnis des Logarithmierens gibt also an, mit welchem Exponenten x man die Basis a potenzieren muss, um den Numerus b zu erhalten.

Spezialfälle

- Zehner-Logarithmus (dekadischer Logarithmus): $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Natürlicher-Logarithmus: $\log_e b = \ln b$ mit $e = 2,71828\ldots$ (*eulersche Zahl*)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8.1 Rechengesetze

Definition

Beispiel:

Bestimmen Sie x indem Sie die Gleichungen in die Potenzschreibweise umwandeln:

$$\log_2 32 = x \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_2 16 = x \quad \Leftrightarrow$$

$$\lg 10 = x \quad \Leftrightarrow$$

$$\lg 100 = x \quad \Leftrightarrow$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8.1 Rechengesetze

Rechenregeln

Rechenregeln

$(a, b, u, v, c > 0, a \neq 1)$:

1. $\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b;\ 10^{\lg b} = b;\ e^{\ln b} = b$
3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$ mit $p \epsilon \mathbb{R}$

Vereinfachen Sie die nachfolgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $\log_3 (9a^4) =$

b) $\log_3 \frac{b^2}{27} =$

c) $\log_2 \frac{1}{4} =$

d) $\log_2 5 + \log_2 3 =$

e) $\log_4 8 =$

f) $\log_3 \frac{2}{9} - \log_3 \frac{8}{27} =$

g) $\log_5 8 \cdot \log_5 4 =$

h) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5 =$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

8.2 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Lösungsverfahren

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Exponentialgleichungen

Lösen durch „Logarithmieren“

$2^x = 5 \quad | \ \log_2$

$\Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x \log_2 2 = \log_2 5$

$\Rightarrow x = \log_2 5$

oder 2. Möglichkeit:

$2^x = 5 \quad | \ \ln$

$\Rightarrow \ln(2)^x = \ln 5$

$\Rightarrow x \ln 2 = \ln 5$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$5^{x+5} = 2 \quad | \ \log_5$

$\Rightarrow \log_5(5)^{x+5} = \log_5 2$

$\Rightarrow x + 5 = \log_5 2$

$\Rightarrow x = \log_5 2 - 5$

oder 2. Möglichkeit:

$5^{x+5} = 2 \quad | \ \ln$

$\Rightarrow \ln\left(5^{x+5}\right) = \ln 2$

$\Rightarrow (x+5) \cdot \ln 5 = \ln 2 \quad \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5} - 5$

Logarithmische Gleichungen

Lösen durch „Entlogarithmieren“

(für $x > 0$)

$\lg x = 2 \quad |$ beide Seiten der Gleichung zur Basis 10 erheben

$\Rightarrow 10^{\lg x} = 10^2$

$\Rightarrow x = 100$

(für $x > 0$)

$\ln \frac{x}{2} = -0{,}4 \quad |$ beide Seiten zur Basis e erheben: e°

$\Rightarrow e^{\ln \frac{x}{2}} = e^{-0{,}4}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = e^{-\frac{2}{5}} \Rightarrow x = 2 \cdot e^{-\frac{2}{5}}$

$\ln(2x+4) + \ln(x-1) = 3$

Es gilt: $2x + 4 > 0 \wedge x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x > 1 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

$\Rightarrow \ln\big((2x+4) \cdot (x-1)\big) = 3 \quad |$ beide Seiten zur Basis e erheben: e°

$\Rightarrow e^{\ln((2x+4) \ (x-1))} = e^3$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4x - 4 = e^3 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 4 - e^3 = 0$ → Quadratische Glg

Lösungen $x_1 \approx 3{,}0061$ und $x_2 \approx -4{,}0061 \notin D$

$\Rightarrow L = \{3{,}0061\}$

1. $\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b;\ 10^{\lg b} = b;\ e^{\ln b} = b$
3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

8.2 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Beispiele

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $10^{1-x} = \frac{1}{100}$

b) $\left(49\sqrt{7}\right)^{x} = 49$

c) $\lg x = \frac{1}{4}$

d) $\log_5(2x-1) = 2$

e) $\log_2 x^2 = 3$

f) $\ln x = \frac{1}{2}\ln 49 - \frac{1}{3}\ln 125$

1. $\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1$
2. $a^{\log_a b} = b;\ 10^{\lg b} = b;\ e^{\ln b} = b$
3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = \log_a 1 - \log_a v = -\log_a v$
6. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ „Basiswechsel“
7. $p \cdot \log_a b = \log_a (b^p)$ mit $p \in \mathbb{R}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

9. Lineare Gleichungssysteme

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

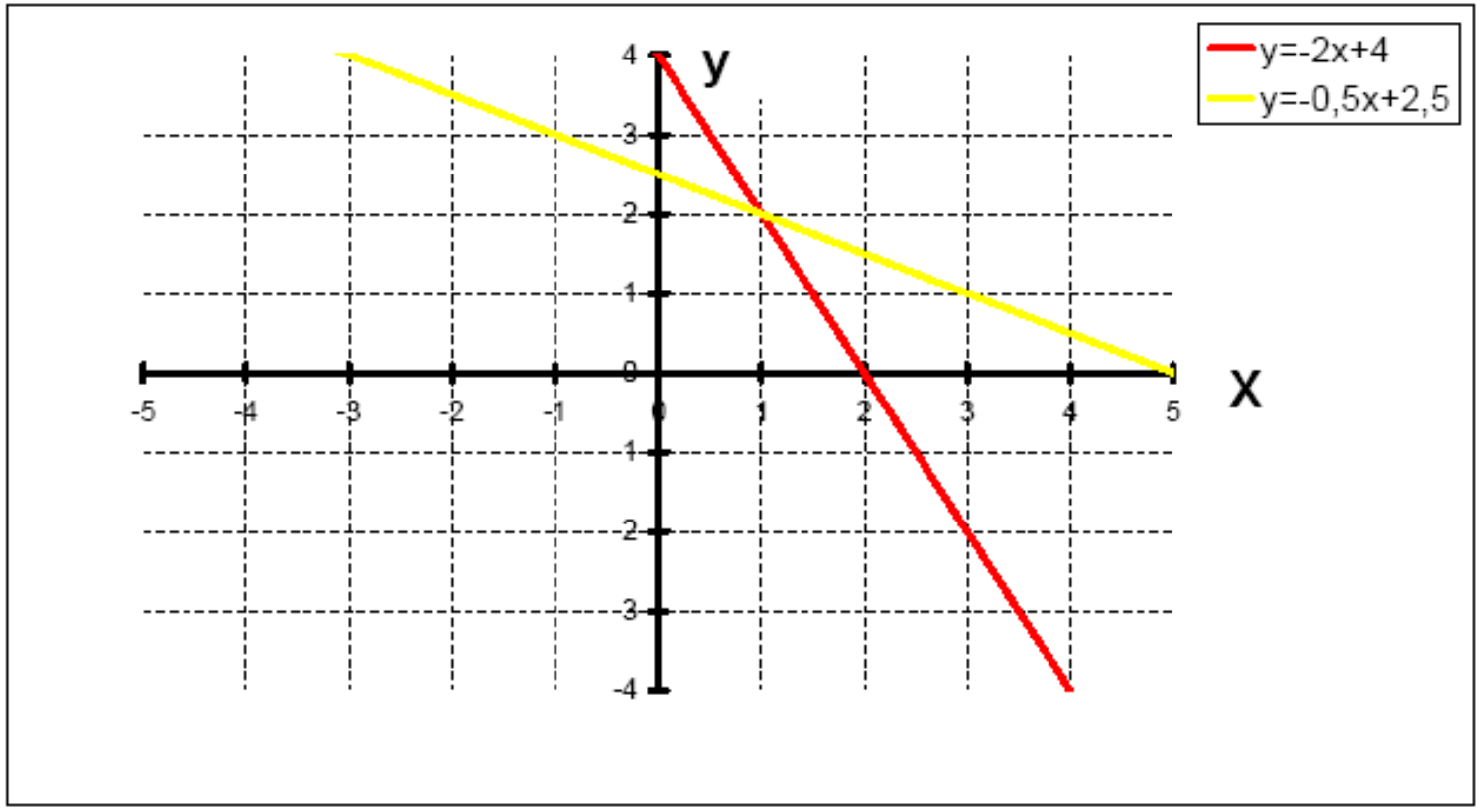
Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Einzige Lösung

$$\left|\begin{array}{l} y = -2x + 4 \\ y = -0{,}5x + 2{,}5 \end{array}\right| \qquad L = \{(1\,|\,2)\}$$



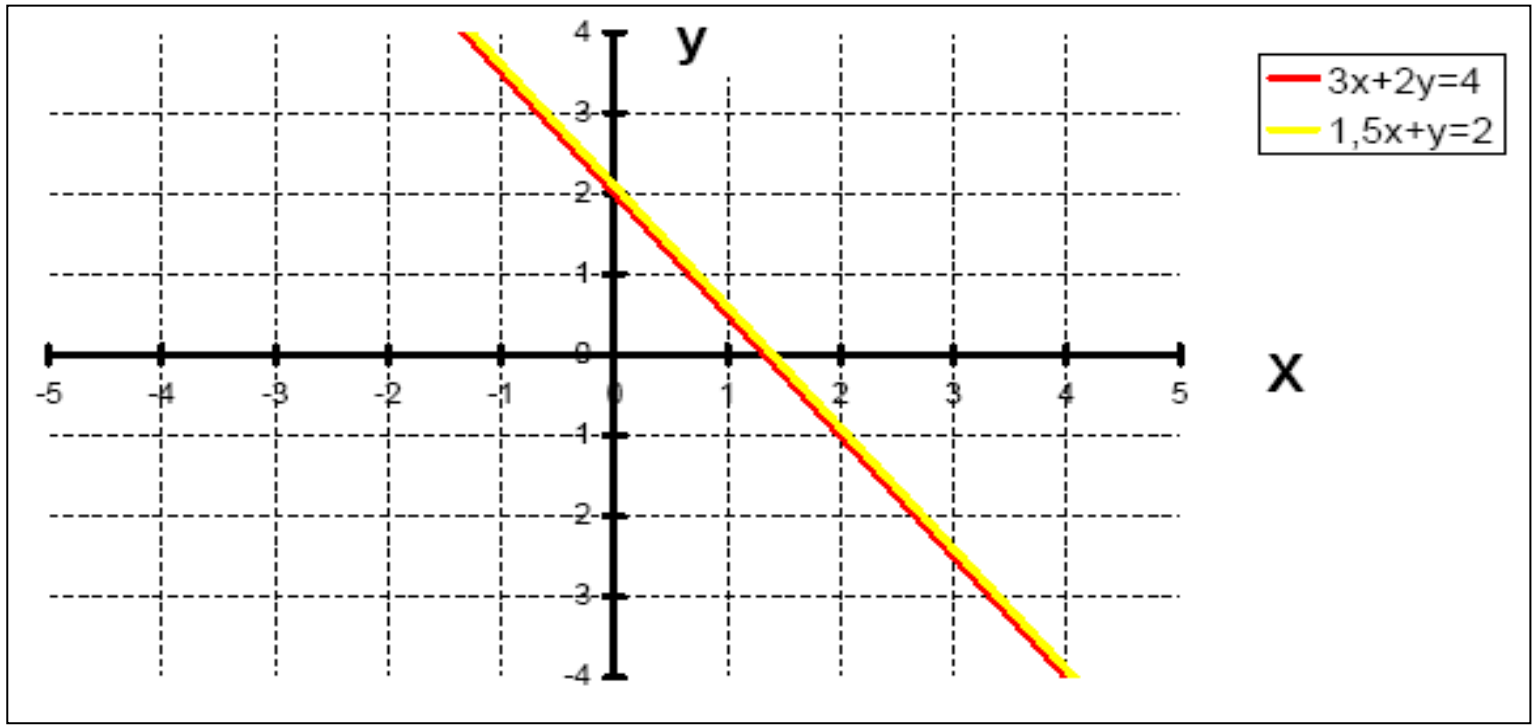
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 3x+2y=4 \\ \text{II.} & 1{,}5x+y=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y=4-3x \\ y=2-1{,}5x \end{array} \quad :2 \Rightarrow \begin{array}{l} y=2-1{,}5x \\ y=2-1{,}5x \end{array}$$



$$L=\{(x\,|\,y)\,|\,y=2-1{,}5x\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

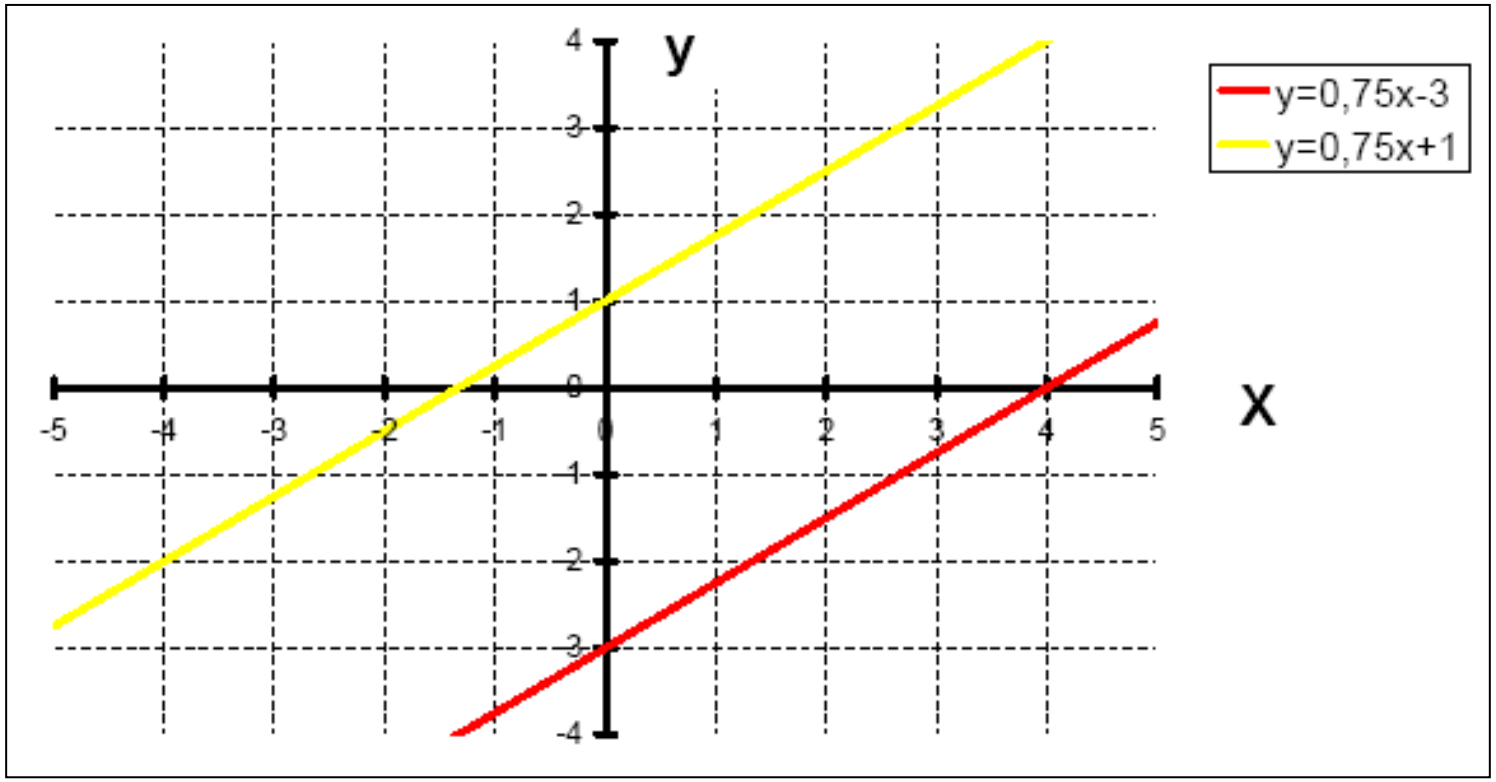
LGS mit zwei Unbekannten

Keine Lösung

I. $y = 0{,}75x - 3$

II. $y = 0{,}75x + 1$

$$L = \{\quad\}$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Einsetzungsmethode

$$\left| \begin{array}{l} 5x + 2y = 13 \\ y = 5 - x \end{array} \right|$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Einsetzungsmethode

$$\begin{array}{ll} I. & 5x+2y=13 \\ II. & y=5-x \end{array}$$

$$\begin{aligned} I.\quad & 5x+2\cdot(5-x)=13 \\ & 5x+2\cdot 5-2\cdot x=13 \\ & 5x+10-2x=13 \\ & 3x=13-10 \\ & 3x=3 \\ & x=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II.\quad & y=5-x \\ & y=5-1 \\ & y=4 \end{aligned}$$

$$Antwort: \quad L=\{(1\,|\,4)\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Einsetzungsmethode

$$\begin{array}{ll} I. & 5x+2y=13 \\ II. & y=5-x \end{array} \Bigg| \quad \bullet$$

Probe:

I.

$$5\cdot 1+2\cdot 4=13$$

$$5+8=13$$

$$13=13 \Rightarrow ok!$$

II.

$$4=5-1$$

$$4=4 \Rightarrow ok!$$

$$x=1; \quad y=4$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Gleichsetzungsmethode

$$\left| \begin{array}{l} y = 12 - x \\ 3y = 2x + 11 \end{array} \right|$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Gleichsetzungsmethode

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & y = 12 - x \\ \text{II.} & 3y = 2x + 11 \end{array} \quad \Big| \cdot 3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} 3y = 36 - 3x \\ 3y = 2x + 11 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 36 - 3x = 2x + 11$$

$$36 - 11 = 2x + 3x$$

$$5x = 25$$

$$x = 5 \quad \rightarrow \text{einsetzen in I.}$$

$$I. \quad y = 12 - 5$$

$$y = 7$$

$$Antwort: \quad L = \{(5 \mid 7)\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Gleichsetzungsmethode

I. $y = 12 - x$

II. $3y = 2x + 11$

$$x = 5; \quad y = 7$$

- Probe:

I. $y = 12 - x$

$7 = 12 - 5$

$7 = 7 \qquad \Rightarrow ok!$

II. $3y = 2x + 11$

$3 \cdot 7 = 2 \cdot 5 + 11$

$21 = 10 + 11$

$21 = 21 \qquad \Rightarrow ok!$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Additions- und Subtraktionsmethode

$$\left|\begin{array}{l} 4x + 2y = 28 \\ 3x + 4y = 36 \end{array}\right|$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Additions- und Subtraktionsmethode

$$\left|\begin{matrix}4x + 2y = 28\\ 3x + 4y = 36\end{matrix}\right| \quad \times 2$$

$$\left|\begin{matrix}8x + 4y = 56\\ 3x + 4y = 36\end{matrix}\right| \quad -$$

$$\begin{aligned} 5x &= 20 \\ x &= 20:5 \quad => \quad x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 4 + 2y &= 28 \\ 2y &= 28 - 16 \\ y &= 12:2 \quad => \quad y = 6 \end{aligned}$$

$$Antwort: \quad L = \{(4\,|\,6)\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Additions- und Subtraktionsmethode

$$\left|\begin{matrix} 4x + 2y = 28 \\ 3x + 4y = 36 \end{matrix}\right|$$

Probe: $x = 4 \quad y = 6$

$$4x + 2y = 28$$
$$4 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 28$$
$$16 + 12 = 28$$
$$28 = 28 \Rightarrow ok!$$

$$3x + 4y = 36$$
$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 36$$
$$12 + 24 = 36$$
$$36 = 36 \Rightarrow ok!$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Übungen

1. *Bestimmen Sie graphisch die Lösungsmenge des Gleichungssystems:*

$$\left|\begin{array}{l} -x+2y=1 \\ 2x-y=4 \end{array}\right|$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

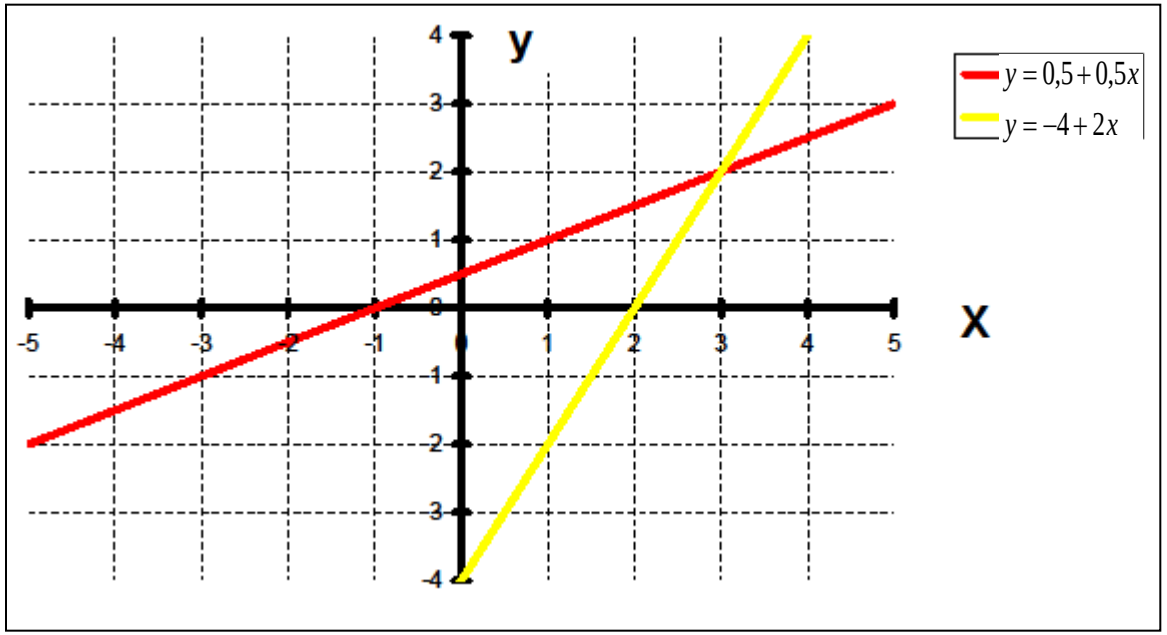
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Übungen

1.

$$\left|\begin{array}{l} -x+2y=1 \\ 2x-y=4 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2y=1+x \\ -y=4-2x \end{array}\right| \begin{array}{l} :2 \\ \cdot(-1) \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y=0{,}5+0{,}5x \\ y=-4+2x \end{array}\right|$$



Probe: $x=3; \quad y=2$

I. $-3+2\cdot 2=1$

$-3+4=1$

$1=1$

II. $2\cdot 3-2=4$

$6-2=4$

$4=4$

$L=\{(3|2)\}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Übungen

2. Bestimmen Sie die Lösung mit dem Additions- oder Subtraktionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} 5x+2y=9 \\ 2x-3y=-4 \end{array}\right|$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Übungen

2. $$\left|\begin{matrix}5x+2y=9\\2x-3y=-4\end{matrix}\right| \begin{matrix}\cdot 3\\ \cdot 2\end{matrix} \Rightarrow \left|\begin{matrix}15x+6y=27\\4x-6y=-8\end{matrix}\right| +$$

$$19x = 19$$

$$x = 1$$ → einsetzen in I.

$$\Rightarrow \left|\begin{matrix}x=1\\5\cdot 1+2y=9\end{matrix}\right|$$

$$2y = 9-5$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

$$\Rightarrow \left|\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right|$$

$$L = \{(1|2)\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Übungen

2. *Probe:* $x = 1; \quad y = 2$

I. $5x + 2y = 9$

$5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 9$

$5 + 4 = 9 \quad \Rightarrow ok!$

II. $2x - 3y = -4$

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$

$-4 = -4 \quad \Rightarrow \quad ok!$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Übungen

Einsetzungsmethode

$$\left|\begin{array}{l} 6x+3y=42 \\ y=3x-1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y=3x-1 \\ 6x+3\cdot(3x-1)=42 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=3\cdot 3-1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=8 \end{array}\right|$$

$$6x+9x-3=42$$

$$15x=45$$

$$x=45:15$$

$$x=3$$

$$L=\{(3|8)\}$$

Probe: $x=3;\ y=8$

I. $6\cdot 3+3\cdot 8=42$

$18+24=42$

$42=42$

II. $8=3\cdot 3-1$

$8=9-1$

$8=8$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

LGS mit zwei Unbekannten

Übungen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Gleichsetzungsmethode

$$\left|\begin{array}{l} 2y = 4x + 4 \\ y = 10x - 22 \end{array}\right| : 2 \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y = 2x + 2 \\ y = 10x - 22 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \cdot 3 + 2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 8 \end{array}\right|$$

$$2x + 2 = 10x - 22$$
$$2x - 10x = -2 - 22$$
$$-8x = -24 \qquad |\cdot(-1)$$
$$8x = 24$$
$$x = 3$$

$$L = \{(3|8)\}$$

Probe: $x = 3;\ y = 8$

I. $2 \cdot 8 = 4 \cdot 3 + 4$
$16 = 16$

II. $8 = 10 \cdot 3 - 22$
$8 = 8$

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10. Funktionen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff

Definition

Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen variablen Größen.

Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Zuordnungsvorschrift, die jeder reellen Zahl x aus dem Definitionsbereich D_f der Funktion eindeutig eine reelle Zahl $y = f(x)$ im Wertebereich W_f zuordnet:

$$f : D_f \rightarrow W_f$$

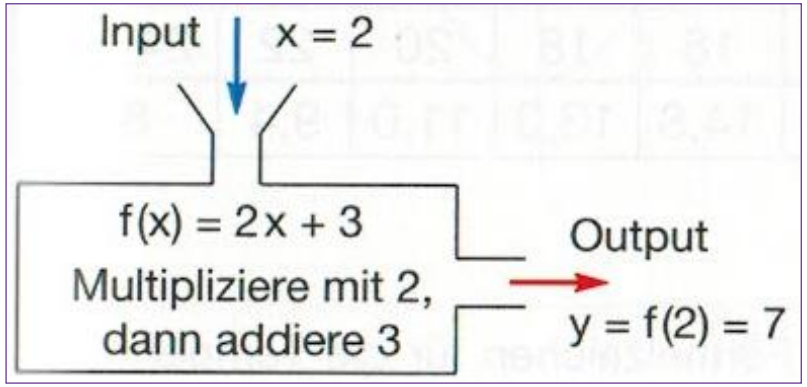
$x \in D_f$:	Unabhängige Variable, Argument
$y \in W_f$:	Abhängige Variable, Funktionswert

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff

Darstellung durch Funktionsgleichung

Darstellungsform		Beispiel
Explizite Darstellung	$y = f(x)$	$y = x^3 - 4x$
Implizite Darstellung	$f(x, y) = 0$	$x^3 - 4x - y = 0$
Parameterdarstellung	$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$	$x = t^3 - t^2, \quad y = t^5 + t$



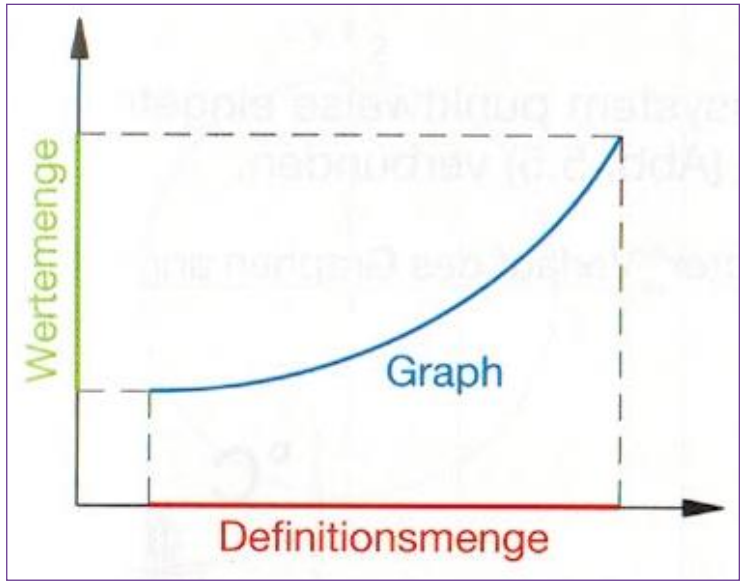
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

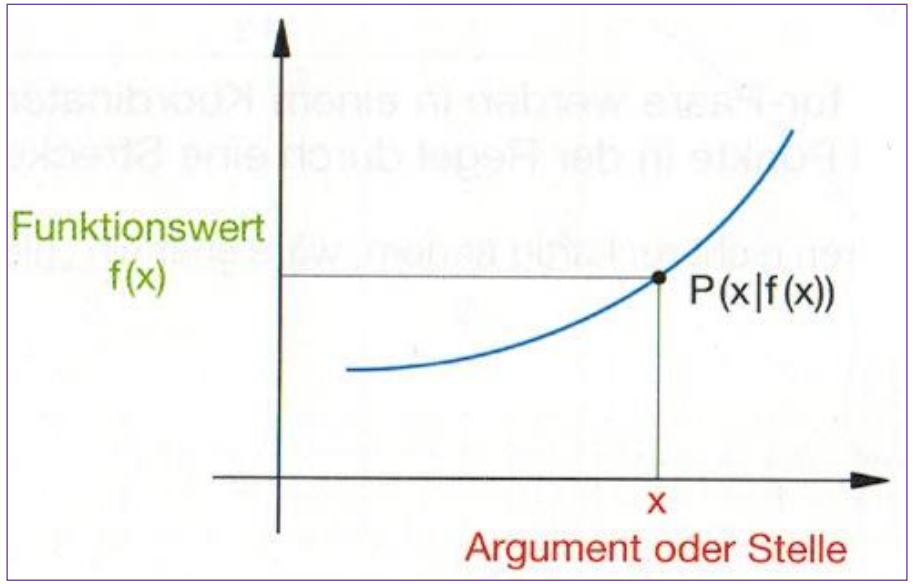
10.1 Funktionsbegriff

Graphische Darstellung

Alle Wertepaare oder Punkte $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ werden in ein (**kartesisches) Koordinatensystem** eingetragen:

x-Achse (Abszizzenachse)	$\rightarrow$	x-Werte (Abszissen)
y-Achse (Ordinatenachse)	$\rightarrow$	y-Werte (Ordinaten)

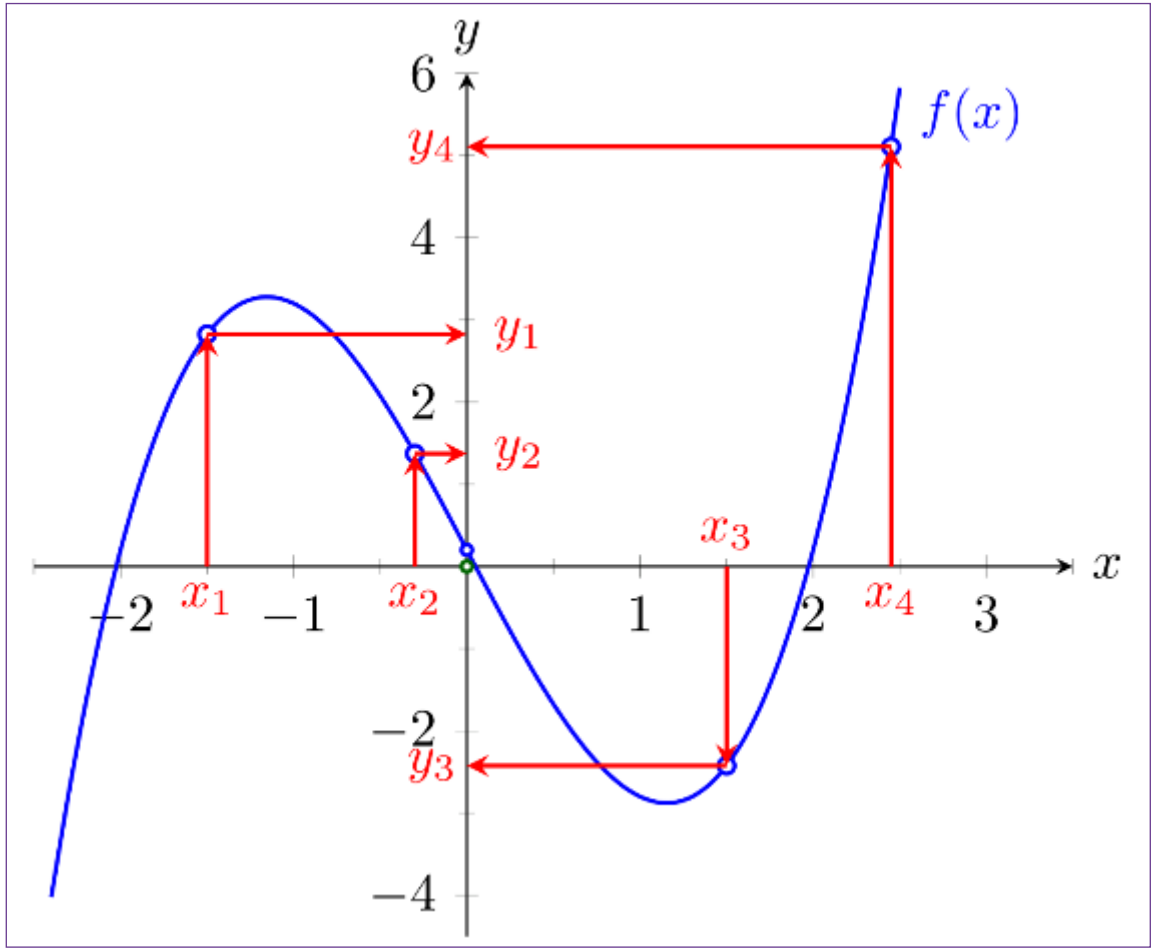




Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff

Graphische Darstellung



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff

Nullstellen

Die **Nullstellen** einer Funktion $f(x)$ sind die Stellen $x_0 \in D_f$, an denen die Funktion den Wert $f(x_0) = 0$ annimmt.

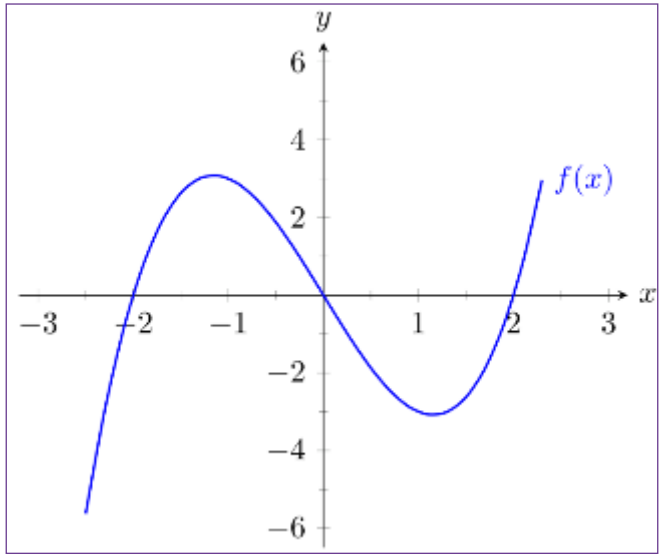
Oder: Eine Lösung x_0 der Gleichung $f(x) = 0$ ist eine **Nullstelle** der Funktion f(x).

→ Die Bestimmung von Nullstellen ist gleichbedeutend mit dem Lösen von Gleichungen.

Beispiel: $f(x) = x^3 - 4x$

Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 4x = 0 \\
&\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 - 4 = 0 \\
&\Rightarrow x_{0,1} = 0, \quad x_{0,2} = 2, \quad x_{0,3} = -2
\end{aligned}
$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

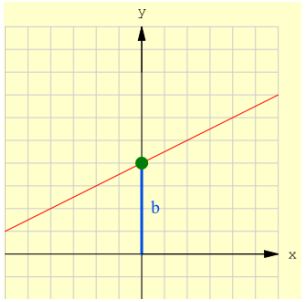
10.2 Lineare Funktion

Definition (Gerade)

Zuordnungen der Form $\boldsymbol{y = m \cdot x + b}$ mit beliebigen, konstanten Zahlen (Parametern) m und b heißen **lineare Zuordnungen** oder **lineare Funktionen**. Die x-Werte werden als Argumente (Stellen), die y-Werte als Funktionswerte bezeichnet. Lineare Funktionen stellen Geraden dar.

m - **Steigung** der Geraden

b – **Schnittpunkt mit der y -Achse** dar.



Eine lineare Funktion mit $m \neq 0$ hat genau eine Nullstelle (Lösen der Gleichung $\boldsymbol{m \cdot x + b = 0}$)

Aufgabe *Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:*

$$y = 3x + 6, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Berechnen Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 2$. Welchen Funktionswert hat jeweils das Argument $x = \frac{1}{2}$?

Aufgabe *Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:*

$$y = 3x - 2, \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}.$$

An welcher Stelle wird jeweils der Funktionswert $y = -5$ bzw. $y = \frac{2}{5}$ angenommen?

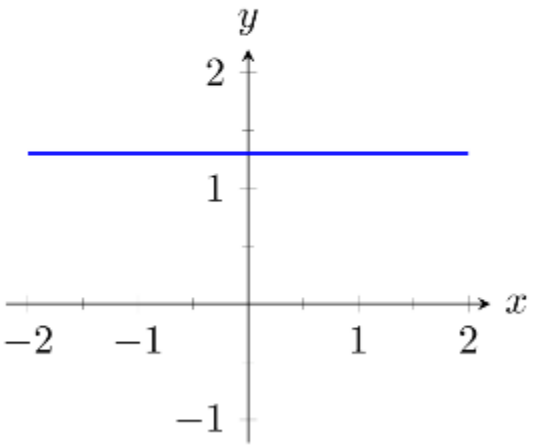
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Spezielle Funktionen

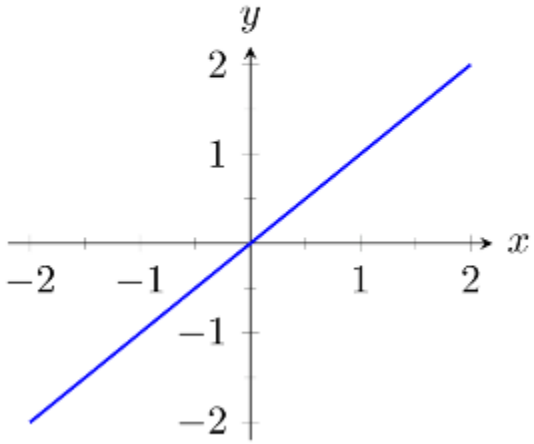
Konstante Funktion:

$$f(x) = y = \text{const.}$$



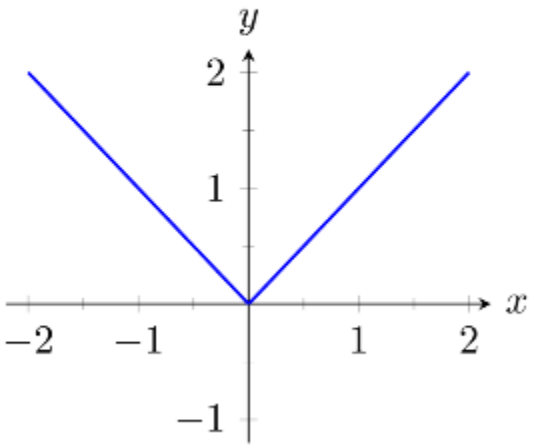
Identität:

$$f(x) = y = x$$



Betragsfunktion:

$$f(x) = y = |x|$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Funktionsgraph

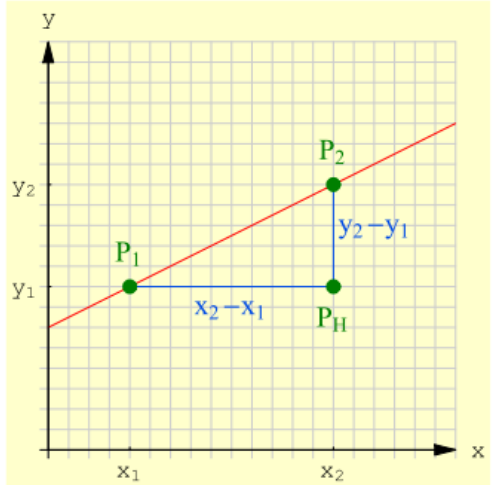
- Mit Wertetabelle
- Ohne Wertetabelle: **Achsenschnittpunkt – Steigungsdreieck**

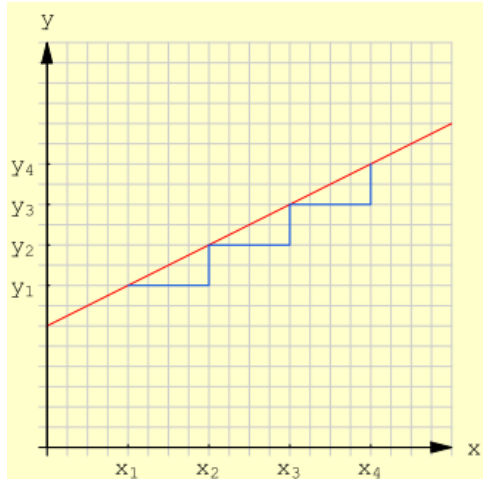
Ist eine lineare Funktion $y = mx + b$ gegeben, so gilt für zwei beliebige Argumente $x_1 \neq x_2$ mit Funktionswerten y_1 bzw. y_2 die Beziehung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Unabhängig von den gewählten Punkten stellt sich **dasselbe Verhältnis der Differenz der Funktionswerte zur Differenz der Argumente** ein.

Die Punkte $P_1 = (x_1 | y_1)$ und $P_2 = (x_2 | y_2)$ kann man zusammen mit dem Hilfspunkt $P_H\ (x_2 \mid y_1)$ in ein Koordinatensystem einzeichnen und als Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks auffassen. Dieses Dreieck heißt **Steigungsdreieck**. Der Parameter m ergibt sich als Streckenverhältnis im Steigungsdreieck.





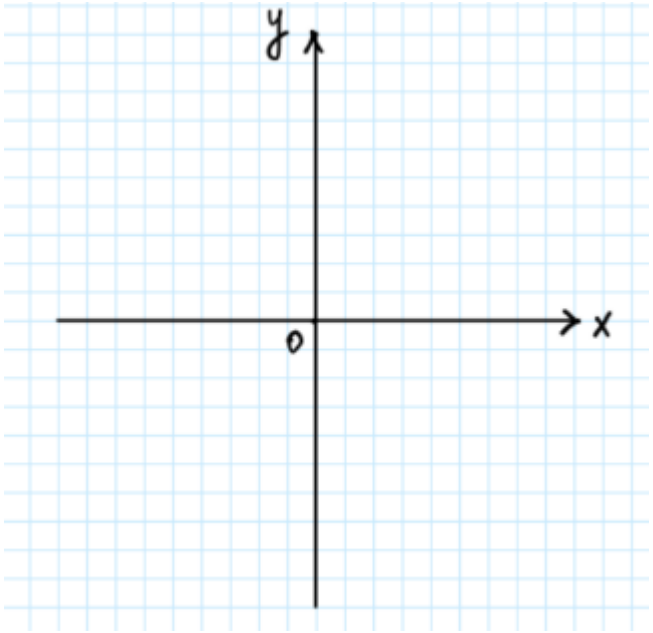
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Funktionsgraph - Achsenschnittpunkt – Steigungsdreieck

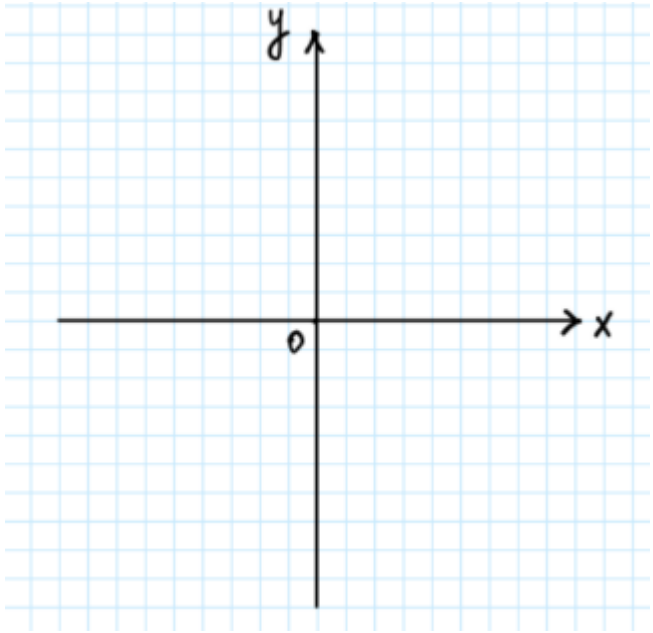
Beispiele:

a) $y = 2x + 1$



Beispiele:

b) $y = -\frac{2}{3}x - 2$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Zugehörigkeit eines Punktes

Ein Punkt $P\ (x|y)$ liegt auf den Graphen einer Funktion $y = f(x)$, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Beispiel *Überprüfen Sie, ob die Punkte* $\mathrm{P}_1\,(0 \mid 2)$ *und* $\mathrm{P}_2\,(2 \mid 6)$ *auf dem Graphen der Funktion* $y = 5x - 4$ *liegen.*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_1: \quad & 2 \stackrel{?}{=} 5 \cdot 0 - 4 \\ & 2 \neq -4 \\ \mathrm{P}_2: \quad & 6 \stackrel{?}{=} 5 \cdot 2 - 4 \\ & 6 = 6 \end{aligned}$$

Da heißt, P_1 *befindet sich nicht auf dem Funktionsgraphen,* P_2 *hingegen schon.*

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Bestimmung der Funktionsgleichung

Punkt-Steigungsform: Sind der Punkt $\mathrm{P}\,(x_0/y_0)$ und die Steigung m einer Geraden bekannt, lautet die Geradengleichung

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

oder

$$y = mx + y_0 - mx_0 = mx + b$$

Beispiel *Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch den Punkt* $\mathrm{P}\,(3 \mid 4)$ *mit der Steigung* $m = \frac{2}{3}$.

$$y = \frac{2}{3}x + 4 - \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{2}{3}x + 2$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Bestimmung der Funktionsgleichung

Zwei-Punktform: Sind die beiden Punkte $\mathrm{P}_1\,(x_1 \mid y_1)$ und $\mathrm{P}_2\,(x_2 \mid y_2)$mit $x_1 \neq x_2$ bekannt, so lautet die Funktionsgleichung der durch diese Punkte verlaufenden Geraden

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

oder

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1$$

Beispiel *Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch die Punkte* $\mathrm{P}_1\,(1 \mid 2)$ *und* $\mathrm{P}_2\,(4 \mid 6)$.

$$y = \frac{6-2}{4-1}x - \frac{6-2}{4-1} \cdot 1 + 2 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Schnittpunkt von zwei Geraden

Zwei Geraden können sich in genau **einem Punkt** schneiden, **zusammenfallen** oder **parallel** sein.

Beispiel *Wir betrachten die Geraden*

$$y = mx + 3 \quad \textit{und} \quad y = 2x + 1.$$

Ist $m = 2$, *so sind die Geraden parallel und besitzen keinen Schnittpunkt.*
Ist $m \neq 2$, *so setzen wir gleich*

$$mx + 3 = 2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad (m-2)x = -2$$

und bekommen

$$x_s = -\frac{2}{m-2}, \quad y_s = 2x_s + 1 = -\frac{4}{m-2} + 1.$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.2 Lineare Funktion

Beispiel: Stromtarife

Die Städtischen Werke Flensburg bieten verschiedene Stromtarife an. Beim Tarif *specialpro* setzen sich die Kosten aus einer Servicepauschale von 118,32€ pro Jahr und einem Arbeitspreis von 13,08 Ct/kWh zusammen. Der Tarif *procity* besteht aus einer Servicepauschale von 58,99 € pro Jahr und einem Arbeitspreis von 17,46 Ct/kWh.

	Jahresverbrauch in kWh	Preis in €Tarif *specialpro*	Preis in €Tarif *procity*
Haushalt 1	1200	275, 28	265, 51
Haushalt 2	1300	288, 36	282, 97
Haushalt 3	1600	327, 60	338, 35
Haushalt 4	2000	379, 92	408, 19
Haushalt 5	3000	510, 72	582, 79

Übersicht über den Jahresstromverbrauch von fünf verschiedenen Haushalten mit den Kosten in zwei Tarifen.

Wenn die Städtischen Werke eine Rechnung erstellen wird der vom Kunden gewählten Tarif (*specialpro* oder *procity*), der **Jahresstromverbrauch** und der zu zahlende Betrag aufgeführt. Dieser Betrag entsteht wie folgt:

$$\text{Arbeitspreis } €/\text{kWh} \cdot \text{Stromverbrauch kWh} + \text{Servicepauschale } € = \text{Rechnungsbetrag } €.$$

$0,1746€/\text{kWh} \cdot 3578\text{kWh} + 58,99€ = 683,7088€.$ ⟹ $y = 0,1746 \cdot x + 58,99.$

Ganz analog ergibt sich im Tarif *specialpro*: ⟹ $y = 0,1308 \cdot x + 118,32.$

Welcher Stromtarif ist günstiger?
→ Schnittpunkt der Geraden

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

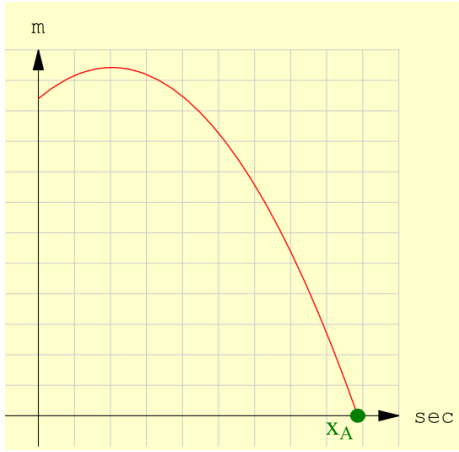
10.3 Quadratische Funktionen

Beispiel: Freier Fall

Wir stellen uns vor, dass Hermann auf dem schiefen **Turm von Pisa** einen Ball senkrecht nach oben wirft. Der Ball unterliegt der Erdanziehungskraft und fällt zu Boden. Aus dem Newtonschen Axiom

Kraft = Masse × Beschleunigung

und der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ erhält man das Weg-Zeit-Gesetz für den freien Fall.



$x_0 = 0\,(s) \mathrel{\hat{=}}$ „Zeitpunkt des Bewegungsanfangs"

$x\,(s) \mathrel{\hat{=}}$ „späterer Zeitpunkt"

$y\,(m) \mathrel{\hat{=}}$ „Abstand vom Boden"

$y_0\,(m) \mathrel{\hat{=}}$ „Anfangshöhe" $\rightarrow y_0 = 52\ m$

$v_0\,(m/s) \mathrel{\hat{=}}$ „Anfangsgeschwindigkeit" $\rightarrow v_0 = 10\ m/s$

Weg-Zeit-Gesetz

$$y = -\frac{1}{2}9,81x^2 + 10x + 52,$$

Dieser Weg-Zeit-Gesetz beschreibt die Zuordnung **Zeit→Abstand** des Balles vom Erdboden.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.3 Quadratische Funktionen

Definition

Eine Funktion der Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ stellt eine **allgemeine Parabel** mit dem **Scheitelpunkt** $\boldsymbol{S}$ $(\boldsymbol{x_S}, |\boldsymbol{y_S})$ dar.

Eine andere Darstellungsform für Parabeln ist die **Scheitelpunktsform**:

$$a(x - x_s)^2 + y_s$$

„Quadratische Ergänzung“

Für die Koordinaten des Scheitelpunktes gilt dabei:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$$y_s = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Jede Parabel ist zu einer Geraden symmetrisch, die zur y -Achse parallel ist und durch den Scheitelpunkt S verläuft.

Es gilt

- $a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet.
- $a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet.

Beispiele:

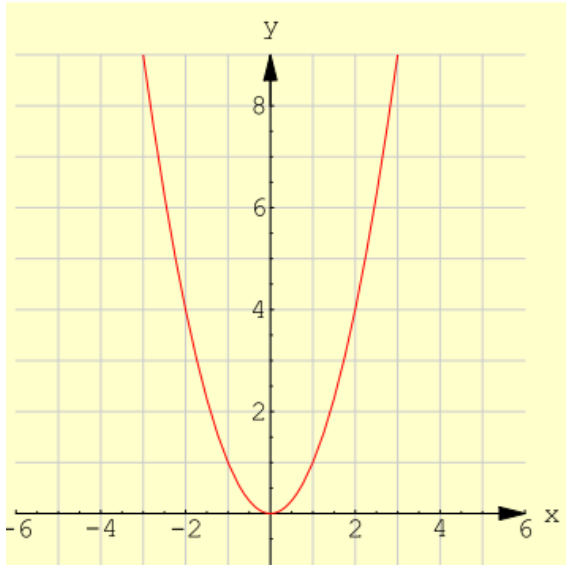
$y_1 = 3(x - 5)^2 + 1 \quad \Rightarrow S(x_s|y_s) =$

$y_2 = -2(x + 3)^2 - 1 \Rightarrow S(x_s|y_s) =$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

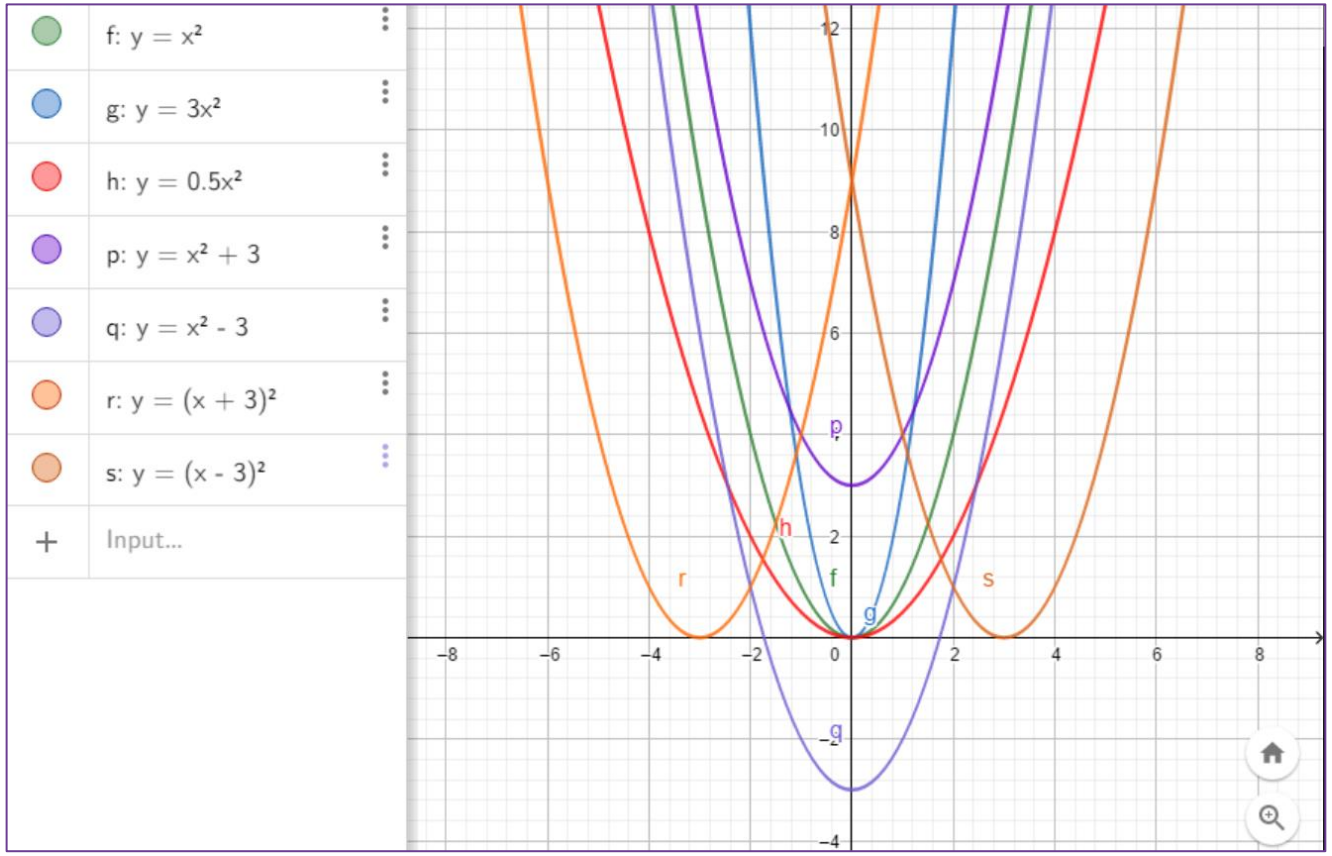
10.3 Quadratische Funktionen

Die Normalparabel



$$y = x^2$$

$$y = \boldsymbol{a}(x - \boldsymbol{c})^2 + \boldsymbol{d}$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.3 Quadratische Funktionen

Die Normalparabel

Was machen die Parameter mit der Parabel?

Funktionsterm	Der Parameter ... bewirkt folgende Abbildung. Welche Fallunterscheidung ist sinnvoll?	
$f(x)=x^2$	Normalparabel	
$f(x)=x^2+d$	Verschiebung der Normalparabel in Richtung der y-Achse um d	
$f(x)=(x-c)^2+d$	Verschiebung der Normalparabel entlang der y-Achse um d und entlang der x-Achse um c	
$f(x)=a\cdot x^2$	$a=1$	-Normalparabel
	$a>0$	-Die Parabel nach oben geöffnet
	$a<0$	-Spieglung an der x-Achse – die Parabel nach unten geöffnet
	$0<\lvert a\rvert<1$	-Die um ***a*** gestauchte Normalparabel
	$\lvert a\rvert>1$	-Die um ***a*** gestreckte Normalparabel
$f(x)=x^2+px+q$	Normalform einer quadratischen Funktion	

$$y = \boldsymbol{a}(x - \boldsymbol{c})^2 + \boldsymbol{d}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.3 Quadratische Funktionen

Schnittpunkte von Parabel und Geraden

Beispiel *Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Parabel* $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2}$ *mit* $g_1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 9 = 0 \,|\cdot(-2) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 9 + 18 = 0 \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \\
& x_1 = 3,\ x_2 = 6
\end{aligned}
$$

Wenn die Gleichung nicht lösbar ist, dann gibt es keine Schnittpunkte!

Einsetzen ergibt $y_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} = 1$ *und* $y_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. *Die Parabel hat somit mit der Geraden* g_1 *die beiden Schnittpunkte* $\mathrm{P}_1\,(3 \mid 1)$ *und* $\mathrm{P}_2\left(6 \mid \frac{5}{2}\right)$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.4 Ganzrationale Funktionen

Definition

Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

heißt **ganzrationale Funktion** oder auch **Polynomfunktion n -ten Grades**.

Ganzrationale Funktionen sind definiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie sind überall stetig.

Schnittpunkt mir der y-Achse: setze $x = 0$ $(\boldsymbol{f(0) = a_0})$

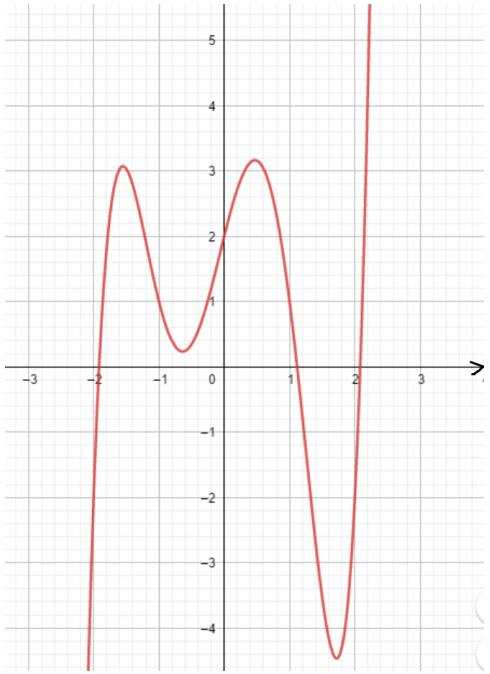
Schnittpunkte mit der x -Achse (Nullstellen): setze $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Faktorsatz: Wenn $f(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und a eine reelle Zahl mit $f(a) = 0$ ist, dann gibt es ein Polynom $g(x)$ vom Grad $n - 1$, so dass

$$f(x) = (x - a)g(x) \quad (\rightarrow \textit{Polynomdivision})$$

Jedes Polynom vom Grad n mit $n \geq 1$ hat **höchstens n Nullstellen**.

Jedes Polynom vom Grad n mit n **ungerade** hat **mindestens eine Nullstelle**.

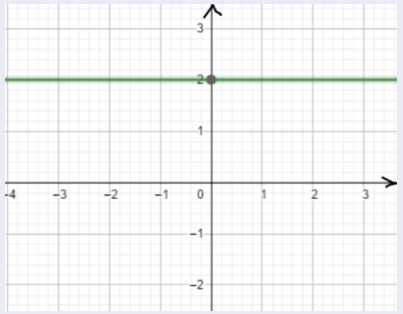
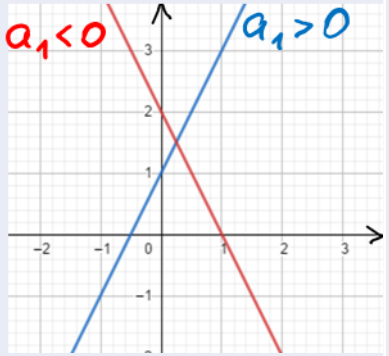
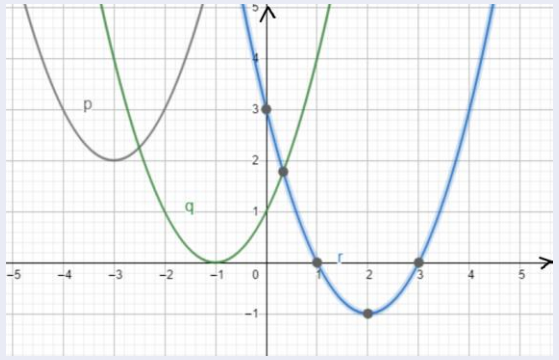
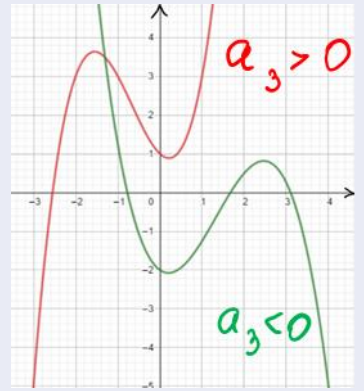


$$f\colon y = x^5 - 5\,x^3 - x^2 + 4\,x + 2$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.4 Ganzrationale Funktionen

Beispiele für $n \leq 3$

Grad	0	1	2	3
Funktions-gleichung	$f_0(x) = a_0$; $a_0 \neq 0$ Konstante	$f_1(x) = a_0 + a_1 x$; $a_1 \neq 0$ lineare Funktion, Gerade	$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; $a_2 \neq 0$ quadratische Funktion, Parabel	$f_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$; $a_3 \neq 0$ kubische Parabel
typische Bilder				
Anzahl der Nullstellen	0	1	Höchstens 2	Höchstens 3, mindestens 1

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.4 Ganzrationale Funktionen

Aufgaben

Geben Sie ein Beispiel von

1. einem Polynom fünften Grades mit 5 verschiedenen Nullstellen
2. einem Polynom fünften Grades mit 4 verschiedenen Nullstellen
3. einem Polynom fünften Grades mit 3 verschiedenen Nullstellen
4. einem Polynom fünften Grades mit 2 verschiedenen Nullstellen
5. einem Polynom fünften Grades mit genau einer Nullstelle
6. einem Polynom sechsten Grades ohne Nullstellen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Definition

Unter einer **gebrochenrationalen Funktion** $f\ (x)$ versteht man den Quotienten aus zwei Polynomen $g\ (x)$ und $h\ (x)$

$$f\ (x)\ = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$g(x)$ – Zählerpolynom vom Grad n

$h(x)$ – Nennerpolynom vom Grad m

Definitionsbereich:	alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms $h\ (x) = 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$
Nullstellen:	Nullstellen des Zählerpolynoms, aber nicht vom Nenner: $g(x) = 0$
Definitionslücken:	Nullstellen des Nennerpolynoms $h\ (x) = 0$
Polstellen:	(= Unendlichkeitsstelle) Nullstellen vom Nenner-, aber nicht vom Zählerpolynom: $x = x_0$ ist senkrechte Asymptote der Kurve Asymptote – eine Gerade, deren sich die Funktion im Unendlichen beliebig nähert (fast berührt); „Tangente im Unendlichen“
stetig behebbare Definitionslücken	gleichzeitig Nullstellen von Zähler- und Nennerpolynom

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

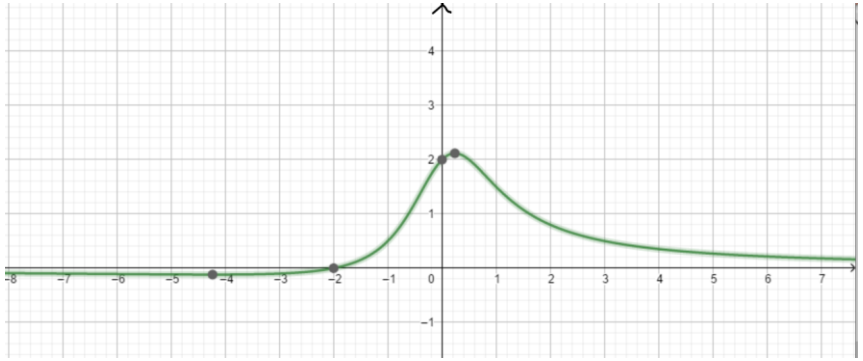
10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$

keine Definitionslücken;

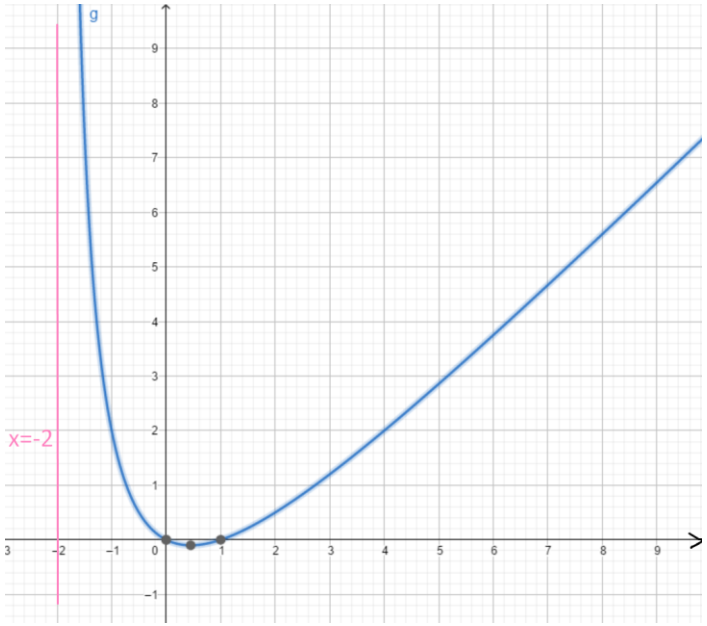
eine Nullstelle: $x = -2$



b) $f(x) = \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x(x-1)}{x+2}$

Definitionslücke: $x = -2$ (Polstelle);

Nullstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Sonderfälle und Bezeichnungen

Unter einer **gebrochenrationalen Funktion** $f\ (x)$ versteht man den Quotienten aus zwei Polynomen $g\ (x)$ und $h\ (x)$

$$f\ (x)\ = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x_+^{m-1} \ldots + b_1 x + b_0}$$

$g(x) -$ Zählerpolynom vom Grad n

$h(x) -$ Nennerpolynom vom Grad m

$m = 0$: Nenner $h(x) = b_0 = const$; $f(x)$ ist eine ganzrationale Funktion

$n \geq m$: Zählergrad $\geq$ Nennergrad, unecht gebrochen rationale Funktion

$n < m$: Zählergrad $<$ Nennergrad, echt gebrochen rationale Funktion

Jede unecht gebrochen rationale Funktion $(n \geq m)$ lässt sich darstellen als Summe einer ganzrationalen Funktion vom Grad $(n - m)$ und einer echt gebrochenrationalen Funktion (→Polynomdivision):

a) $\frac{x^3-3x+5}{x-2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{7}{x-2}$

b) $\frac{3x^2+4x+9}{x^2+5} = 3 + \frac{4x-6}{x^2+5}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 1: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (Polstellen)

Beispiel 1: $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$; $\boldsymbol{x_0 = 3}$ einfache Nenner-Nullstelle

$f(x) \to +\infty$ für $x \to 3+$ (von rechts)

$f(x) \to -\infty$ für $x \to 3-$ (von links)

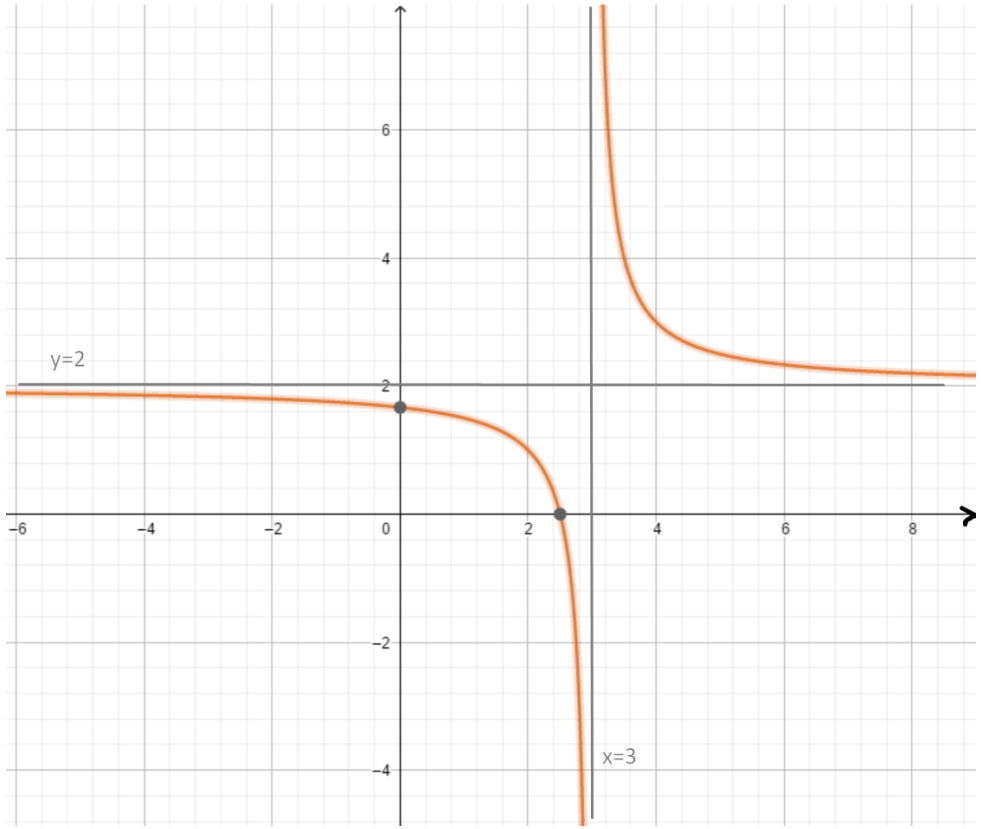
Beim Überschreiten der Stelle $x_0 = 3$ ändert sich das Vorzeichen der Funktionswerte
→$f(x)$ besitzt bei $\boldsymbol{x_0 = 3}$ einen **Pol mit Zeichenwechsel** (punktsymmetrisch).

Die Kurve nähert sich immer mehr der Geraden $x = 3$: die **Gerade $\boldsymbol{x = 3}$** ist **senkrechte Asymptote**.

Für die Skizze benötigt man noch das Verhalten für $|x| \to \infty$:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3} \to 2 \text{ für } x \to \pm\infty$$

Für große Werte von $|x|$ unterscheidet sich $f(x)$ immer weniger von 2: $\boldsymbol{y = 2}$ ist **waagrechter Asymptote** der Kurve.
Die Annäherung erfolgt nach rechts von oben und nach links von unten, wegen $\frac{1}{x-3} > 0$ für $x > 3$ und $\frac{1}{x-3} < 0$ für $x < 3$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 1: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (Polstellen)

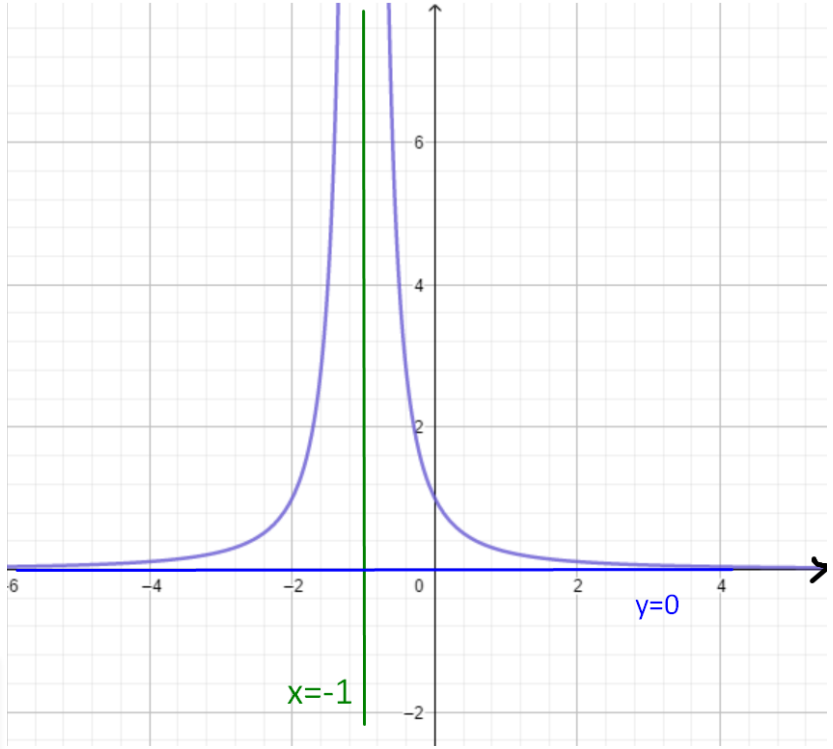
Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; $\boldsymbol{x = -1}$ doppelte Nenner−Nullstelle

$f(x) \to +\infty$ für $x \to -1^{\pm}$ (Unabhängig davon, ob Annäherung von rechts oder von links)

Beim Überschreiten der Stelle $x_0 = -1$ tritt keine Änderung des Vorzeichens auf: $f(x)$ hat bei $x_0 = -1$ ein **Pol ohne Zeichenwechsel** (achsensymmetrisch).

→ Die Kurve besitzt die **senkrechte Asymptote $\boldsymbol{x = -1}$**

→ $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty \Rightarrow \boldsymbol{y = 0}$ ist **waagrechte Asymptote**



Ist x_0 eine n-fache Nullstelle des Nennerpolynoms und keine Nullstelle des Zählerpolynoms, so besitzt $f(x)$ bei x_0 eine Unendlichkeitsstelle oder einen Pol;
$x = x_0$ ist **senkrechte Asymptote der Kurve**
n gerade ⇔ Pol ohne Zeichenwechsel
n ungerade ⇔ Pol mit Zeichenwechsel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

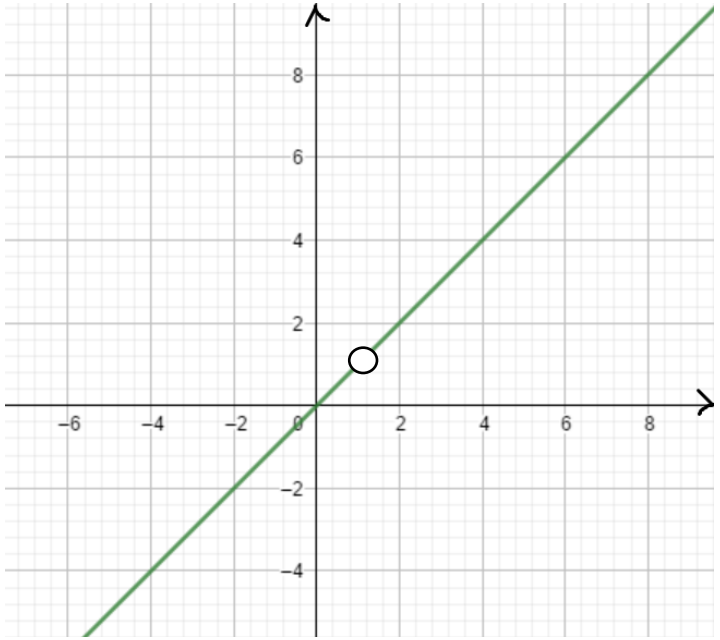
Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)

Beispiel 3: $f_1(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ definiert für alle reellen $x \neq 1$

$x_0 = 1$ ist Nullstelle von Nenner und Zähler; für $x \neq 1$ kann man also den Faktor $(x-1)$ kürzen:

$$f_1(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x; \quad x \neq 1$$

Das Schaubild von $f_1(x)$ ist die Gerade $y = x$ ohne den Punkt $(1|1)$.



Wenn wir uns an die Definitionslücke $x = 1$ beliebig nah von links und rechts nähern, nähert sich der Funktionswert dem Wert 1 (*d.h. linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert für* $|x| \to 1$ *stimmen überein, also existiert ein Grenzwert an dieser Stelle und wir können die Funktion „stetig fortsetzen“*). Nimmt man diesen Punkt hinzu, so erhält man die **stetige Fortsetzung** der Funktion $f_1(x)$:

$$\tilde{f}_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x; & x \neq 1 \\ 1; & x = 1 \end{array} \right\} = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Wir nennen x_0 eine **stetig behebbare Definitionslücke** der Funktion $f_1(x)$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)

Beispiel 4: $f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2}$;

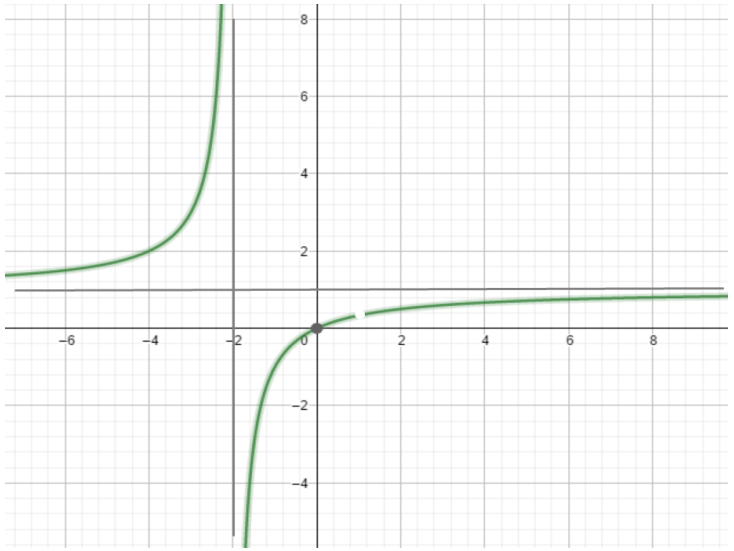
Nenner-Nullstellen: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$$

Zähler-Nullstellen: $x_3 = 0; x_4 = 1$

$x_0 = 1$ ist Nullstelle von Nenner und Zähler; für $x \neq 1$ kann man also den Faktor $(x-1)$ kürzen:

$$f_2(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}; \quad x \neq 1$$



Um das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke $x_0 = 1$ näher zu untersuchen, nähert man sich diesem Wert von beiden Seiten an:

„von links an die 1“	„von rechts an die 1“
$f_2(0) = 0$	$f_2(2) = 0{,}5$
$f_2(0{,}5) = 0{,}2$	$f_2(1{,}5) \approx 0{,}42857$
$f_2(0{,}9) \approx 0{,}310345$	$f_2(1{,}1) \approx 0{,}35484$
$f_2(0{,}99) \approx 0{,}33110$	$f_2(1{,}01) \approx 0{,}3355548$
$f_2(0{,}999) \approx 0{,}333111$	$f_2(1{,}001) \approx 0{,}3335554$

→ *Die Funktion nähert sich in $x_0 = 1$ dem Funktionswert $\frac{1}{3}$.*
*Man sagt „die Funktion **strebt** für $x = 1$ **gegen** $\frac{1}{3}$.*

→ *Hierbei handelt es sich um eine Grenzwertbetrachtung. Man schreibt:*

$$\lim_{x \to 1-} f_2(x) = \lim_{x \to 1+} f_2(x) = \lim_{x \to 1} f_2(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x+2}\right) = \left|\frac{1}{1+2}\right| = \frac{1}{3}$$

(Sprich: “Linksseitiger Grenzwert gleich rechtseitiger Grenzwert gleich Grenzwert (Limes) von $f(x)$ für x gegen 1“).

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

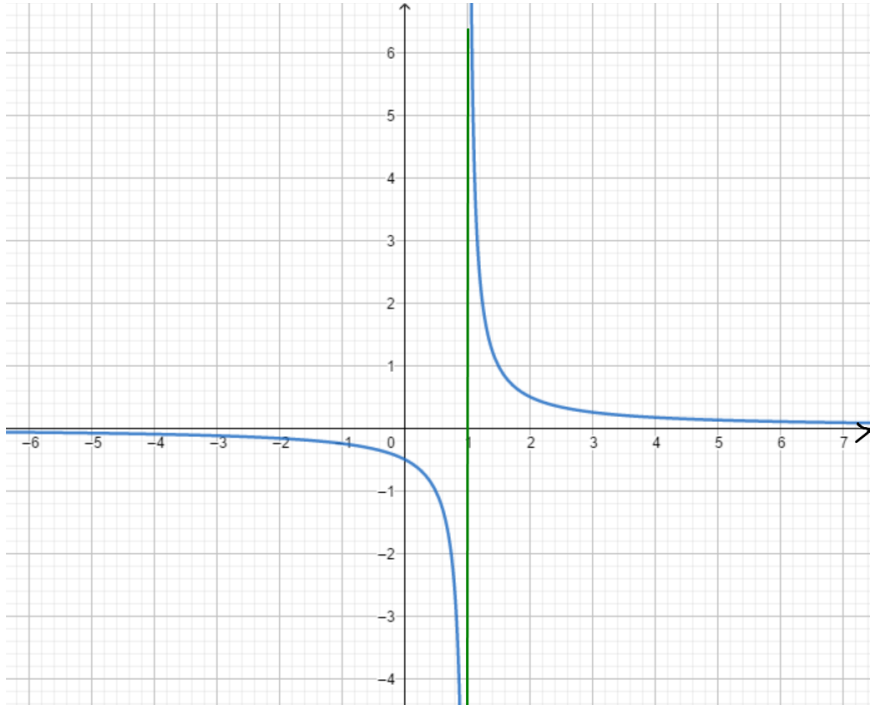
10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Fall 2: Verhalten in der Nähe der Definitionslücken (stetig behebbare Definitionslücken)

Beispiel 5: $f_3(x) = \frac{x-1}{2x^2-4x+2}$ definiert für alle reellen $x \neq 1$

$$f_3(x) = \frac{x-1}{2(x^2-2x+1)} = \frac{x-1}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2(x-1)}, \quad x \neq 1$$

Die **Definitionslücke $x_0 = 1$** ist auch durch Kürzen **nicht zu beheben**. In der gekürzten Form ist x_0 immer noch Nullstelle des Nenners, aber nicht mehr Nullstelle des Zählers:
$f_3(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ einen **Pol mit Zeichenwechsel**.



Ist x_0 **Nullstelle des Nennerpolynoms und des Zählerpolynoms** einer gebrochenrationalen Funktion $f(x)$, so sind zwei Fälle möglich:

a) $f(x)$ kann (durch Kürzen) bei x_0 **stetig ergänzt werden**;

b) $f(x)$ besitzt bei x_0 **einen Pol**.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Verhalten für $|x| \to \infty$ ($x \to \pm\infty$)

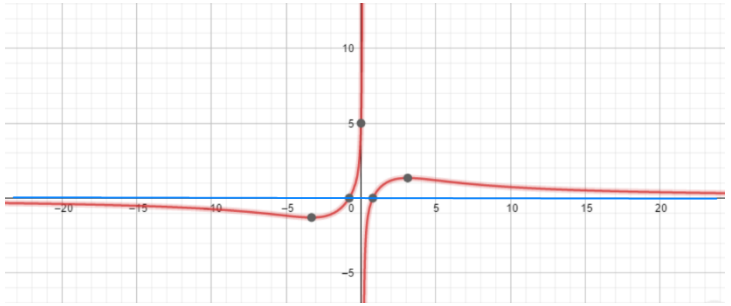
Sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} \ldots + b_1 x + b_0}$

1. Fall $n < m$:

→ x-Achse ist die waagerechte Asymptote.

→ Der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ ist dann gleich Null: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$

Beispiel: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{8x^2-5}{x^3+8x-1} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{8}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{8}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \left|\frac{0}{1}\right| = 0$

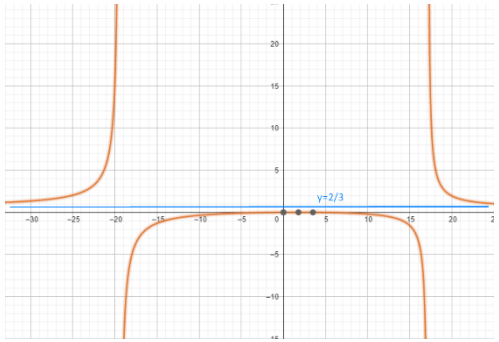


2. Fall $n = m$:

→ die Gerade $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist die waagerechte Asymptote

→ $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = const$

Beispiel: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-7x}{7x+3x^2-1000} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{7}{x}-\frac{1000}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}$



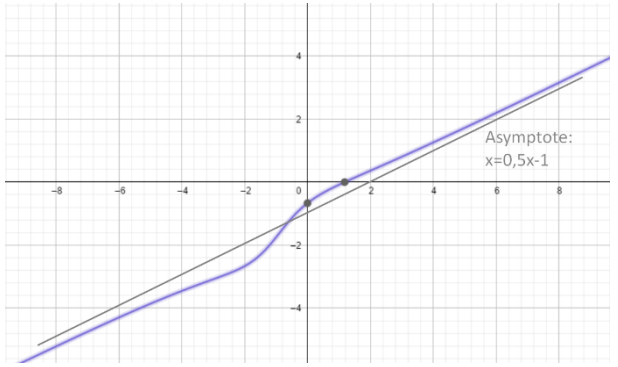
3. Fall $n > m$:

→ mit Polynomdivision zu einer echt gebrochenrationalen Funktion umformen; für unendlich große x geht der Bruch im Rest zu Null

→ der „ganze“ Term ergibt die Gleichung der Asymptote an

→ $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \pm\infty$ *(das Vorzeichen hängt vom Vorzeichen von a_n und davon ab, ob n gerade oder ungerade ist)*

Beispiel: $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3+x-2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{\frac{3}{2}x+1}{x^2+2x+3} \Rightarrow \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \pm\infty$

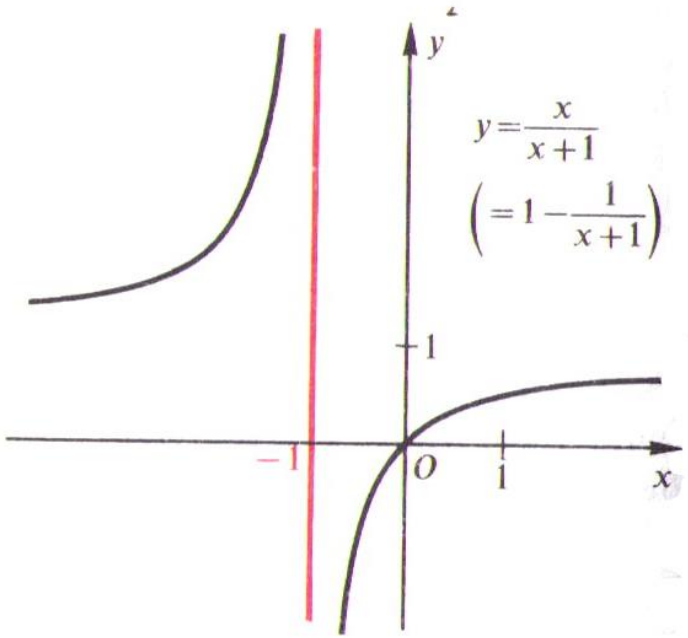


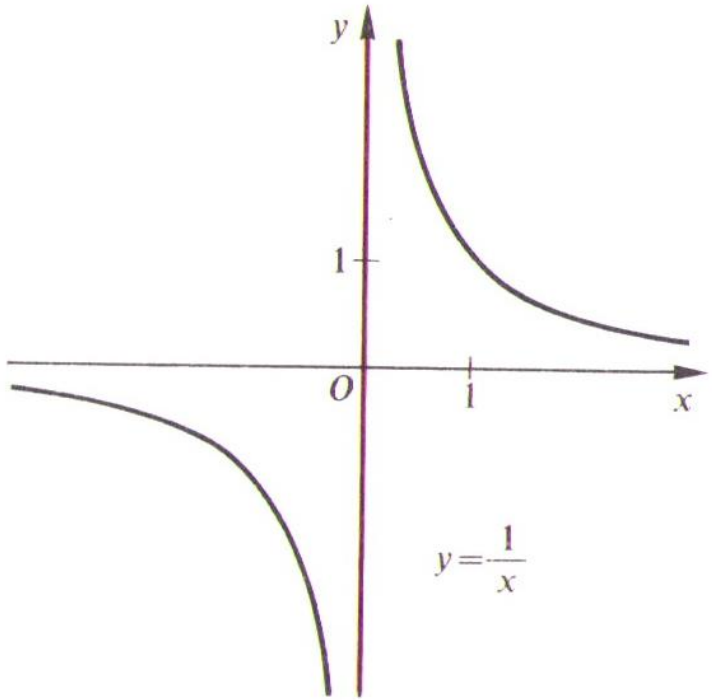
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

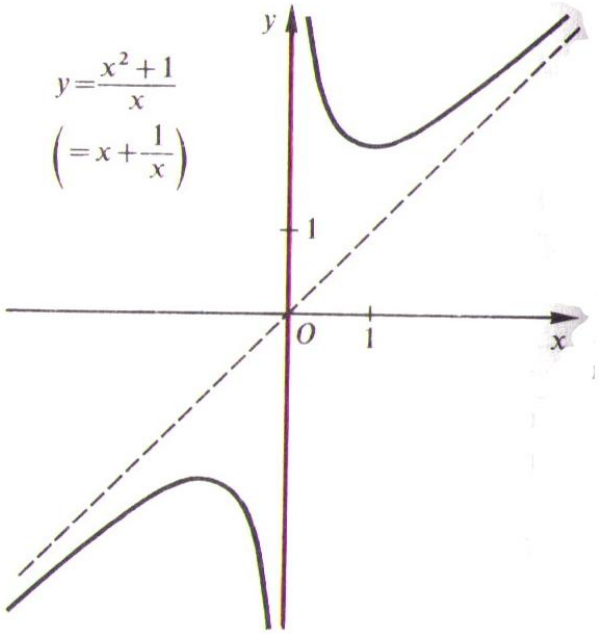
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele







Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

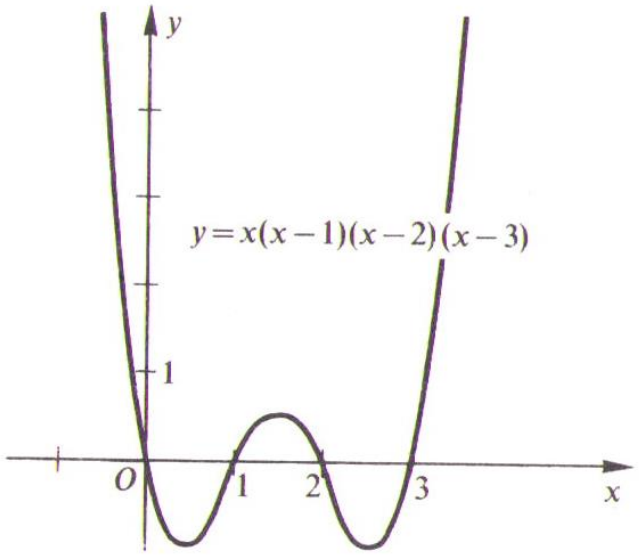
ausgezeichnet als:

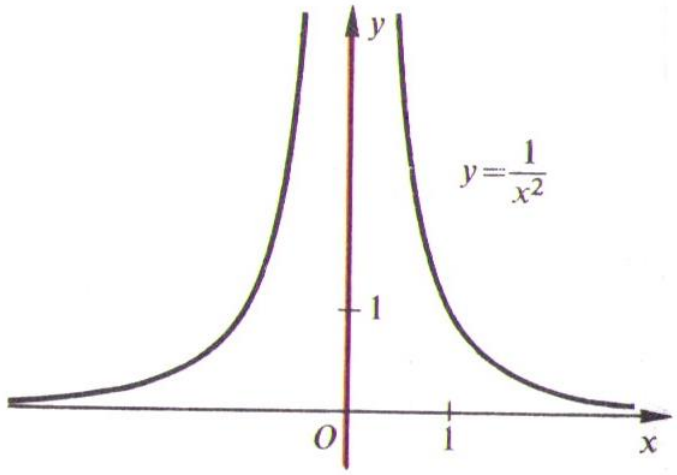
Innovative Hochschule

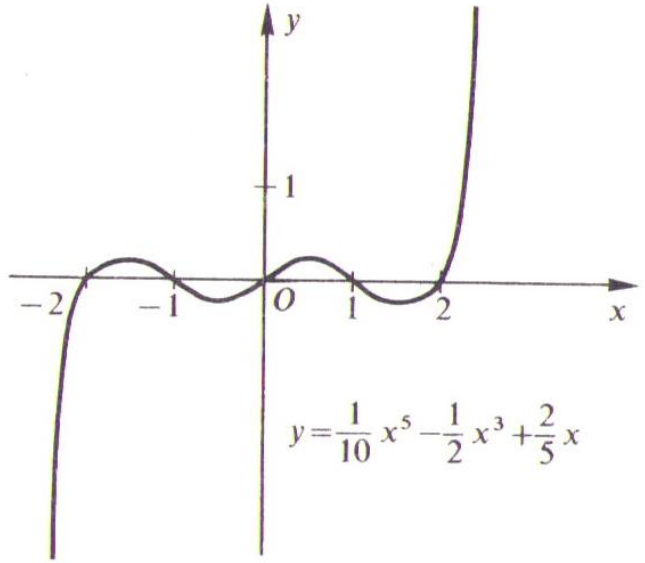
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele







Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

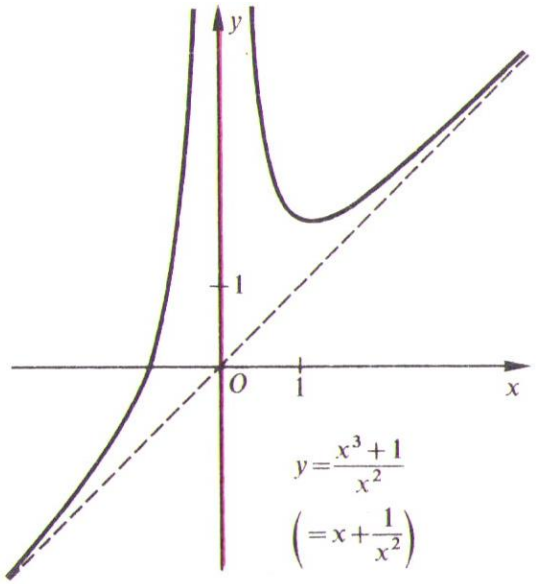
ausgezeichnet als:

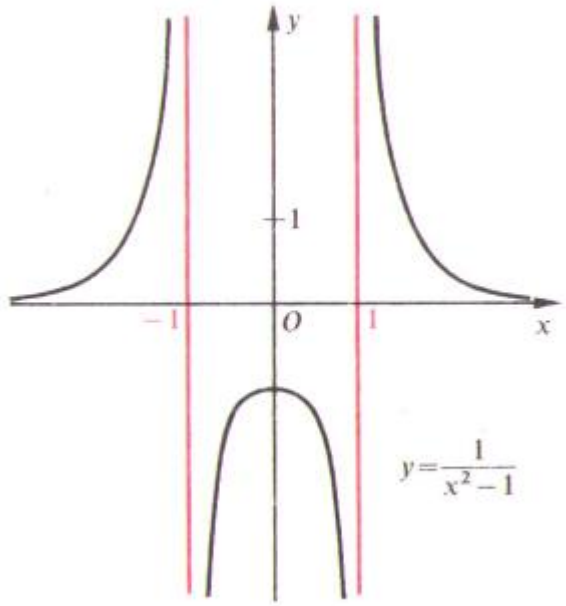
Innovative Hochschule

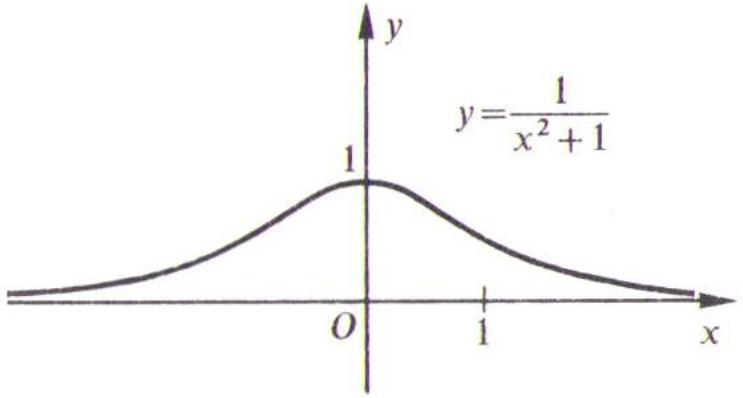
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele







Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

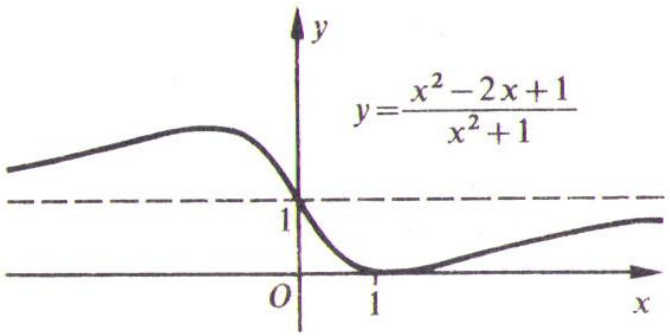
ausgezeichnet als:

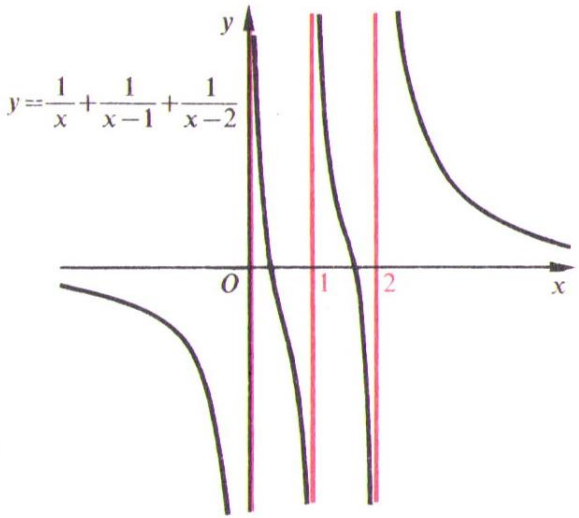
Innovative Hochschule

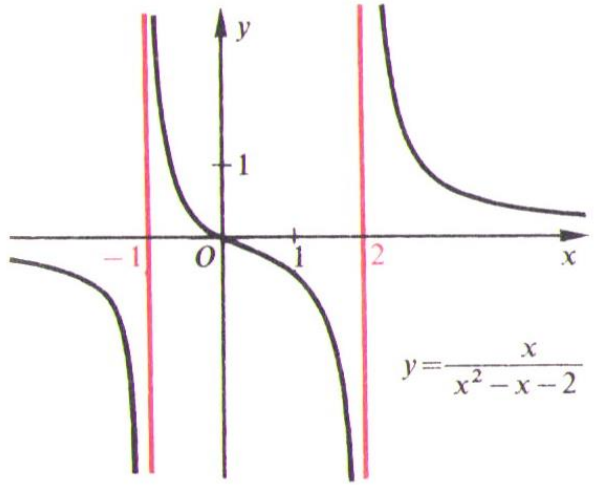
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.5 (Gebrochen)-rationale Funktionen

Beispiele







Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

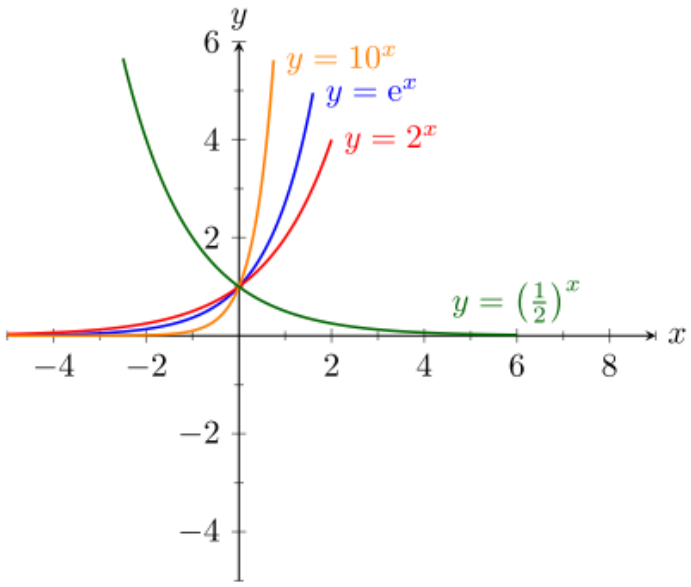
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.6 Die Exponentialfunktion

Eigenschaften

Exponentialfunktionen mit der **Basis a:**

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0 \text{ und } a \neq 1$$



Alle Exponentialfunktionen:

- haben keine Nullstellen und die x-Achse als untere Schranke
- haben den Punkt $(0|1)$ gemeinsam
- nähern sich asymptotisch der x-Achse an, ohne diese jemals zu berühren
- verlaufen oberhalb der x -Achse: $W = \mathbb{R}^+$ sind

  für $0 < a < 1$: streng monoton fallend

  und für $a > 1$: streng monoton steigend
- Für das Grenzwertverhalten der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{, wenn } a > 1 \\ 0 & \text{, wenn } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } a > 1 \\ \infty & \text{, wenn } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.6 Die Exponentialfunktion

Anwendungen

- Zinsrechnung
- Wachstumsprozesse

  Das stetige Anwachsen einer Population wird beschrieben durch die Gleichung:

$$N = N_0 \cdot e^{pt} = \begin{cases} p & \dots \text{ jährlicher Wachstumskoeffizient} \\ t & \dots \text{Zeit in Jahren} \\ N_0 & \dots \text{Anzahl zur Zeit } t = 0 \end{cases}$$

Beispiel: 1980 lebten 4,1 Milliarden Menschen auf der Erde. Wann wird sich die Menschheit verdoppelt haben bei einem jährlichen Wachstum um $p = 1{,}7\%$?

Lösung: Ausgangszustand 1980: $t = 0,\ N_0 = 4{,}1 \cdot 10^9$

t muss so bestimmt werden, dass gilt: $N(t) = 2N_0$

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{pt} = 2N_0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{pt} = 2 \Leftrightarrow \ln(e^{pt}) = \ln 2 \Leftrightarrow pt = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{p} = \frac{\ln 2}{0{,}017} = 40{,}77$$

→ Verdoppelung etwa im Jahr $1980 + 41 = 2021$; unabhängig von N_0, nur abhängig von p!

2020 beträgt die aktuelle Bevölkerung schon 7, 84 Milliarden!

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.7 Die Logarithmusfunktion

Eigenschaften

Die **Umkehrfunktion** zur Exponentialfunktion $\boldsymbol{a^y = x}$ heißt Logarithmus zur Basis a:

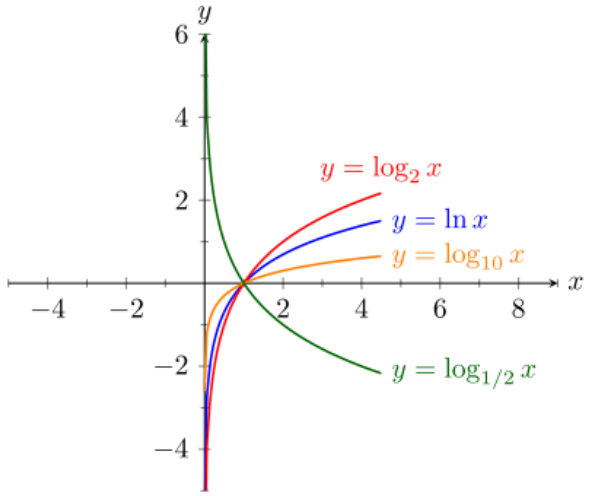
$$\boldsymbol{f(x) = \log_a x}\,, \qquad x > 0 \text{ und } a > 0, a \neq 1$$

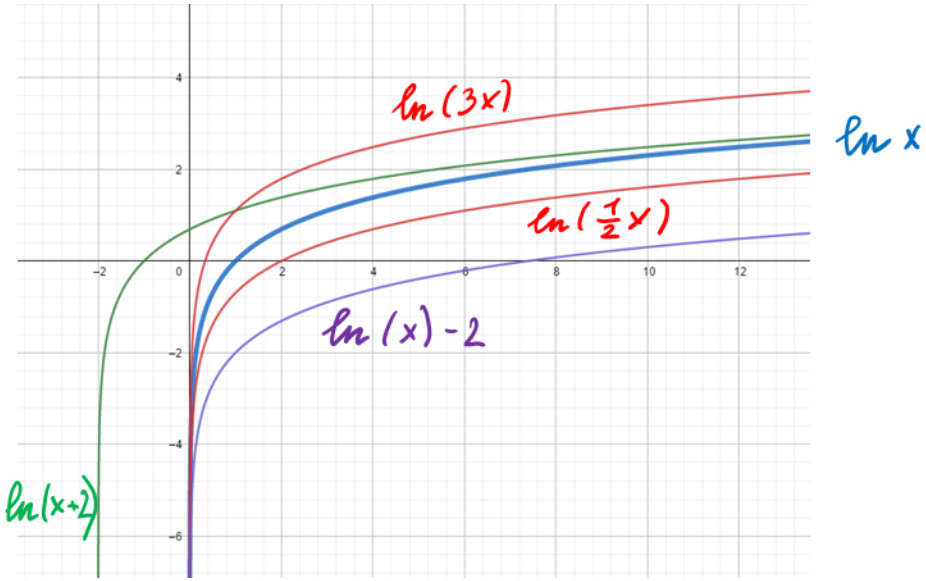
Alle Logarithmusfunktionen:

- sind unbeschränkt, $D = \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}, \quad W = \mathbb{R}$
- haben den Punkt $(\mathbf{1}|\ \mathbf{0})$ als einzige **Nullstelle** gemeinsam
- nähern sich für $x \to 0$ asymptotisch der y-Achse an
- sind
  für $0 < a < 1$: streng monoton fallend
  und für $a > 1$: streng monoton steigend
- Für das Grenzwertverhalten der Logarithmusfunktion gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty; a > 1 \\ -\infty; 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, a > 1 \\ \infty, 0 < a < 1 \end{cases}$$





Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Info: Umkehrbare Funktionen

Definition: Eine Funktion f mit Definitionsbereich D und Wertebereich W heißt **umkehrbar**, wenn zu **jedem Funktionswert y aus W genau ein Argumentwert x aus D** gehört.

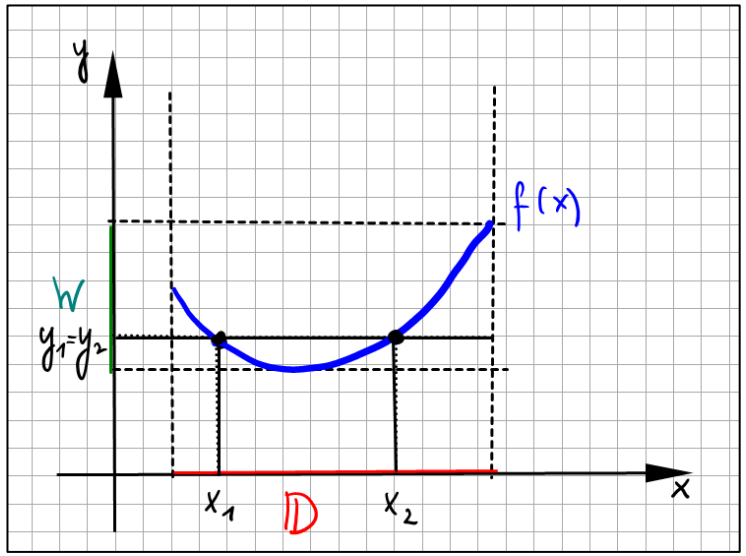
$$f: D \to W_f \Leftrightarrow f^{-1}: W_f \to D$$

Die Funktion f^{-1}, welche den Elementen von W eindeutig die Elemente von D zuordnet, heißt **Umkehrfunktion** der Funktion f.

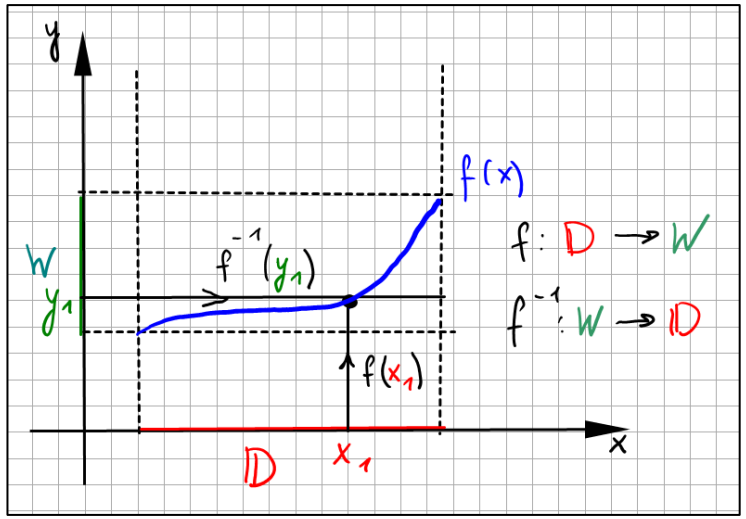
Funktion $y = f(x)$ und Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ besitzen dasselbe Schaubild, nur die Zuordnungsrichtung ist geändert.

Die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ einer umkehrbaren Funktion $f(x)$ erhält man in 2 Schritten:

- Löse die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf $\Rightarrow x = f^{-1}(y)$
- Vertausche die Zeichen x und y $\Rightarrow y = f^{-1}(x)$



Nicht umkehrbar: $f(x_1) = f(x_2)$



umkehrbar: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Info: Umkehrbare Funktionen

Das Schaubild wird an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt:

Dem Kurvenpunkt $(a|b)$ der Funktion $y = f(x)$ entspricht der Kurvenpunkt $(b|a)$ der Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$.

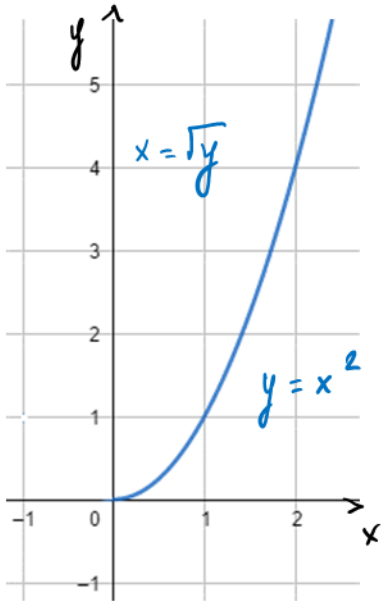
Beispiel: f(x): $y = x^2$ mit $x = \begin{cases} x \in D_f = [0,2] \\ y \in W_f = [0,4] \end{cases}$

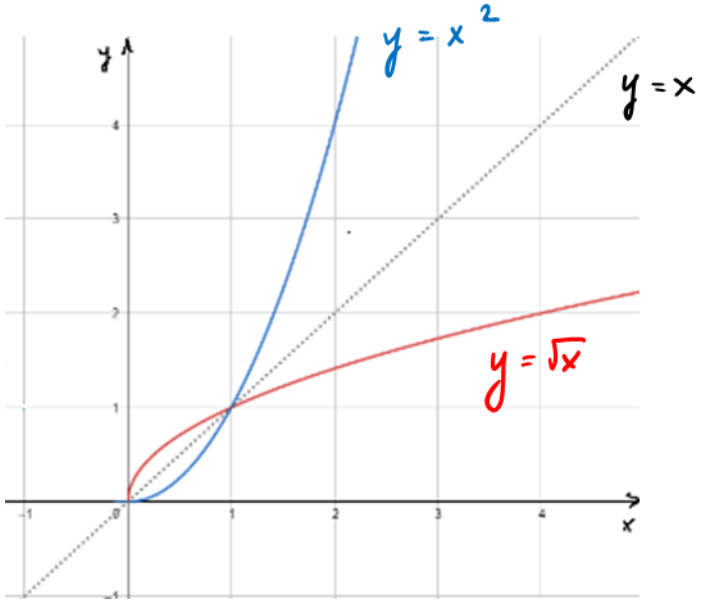
a) Auflösen nach x (→ Änderung der Zuordnungsrichtung)

$\Rightarrow$ f^{-1} (y): $x = \sqrt{y}$ mit $\begin{cases} y \in D_{f^{-1}} = W_f = [0,4] \\ x \in W_{f^{-1}} = D_f = [0,2] \end{cases}$

b) vertauschen von x und y (→ übliche Bezeichnung: Argument x)

$\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$: $y = \sqrt{x}$ mit $\begin{cases} x \in D_{f^{-1}} = [0,4] \\ y \in W_{f^{-1}} = [0,2] \end{cases}$





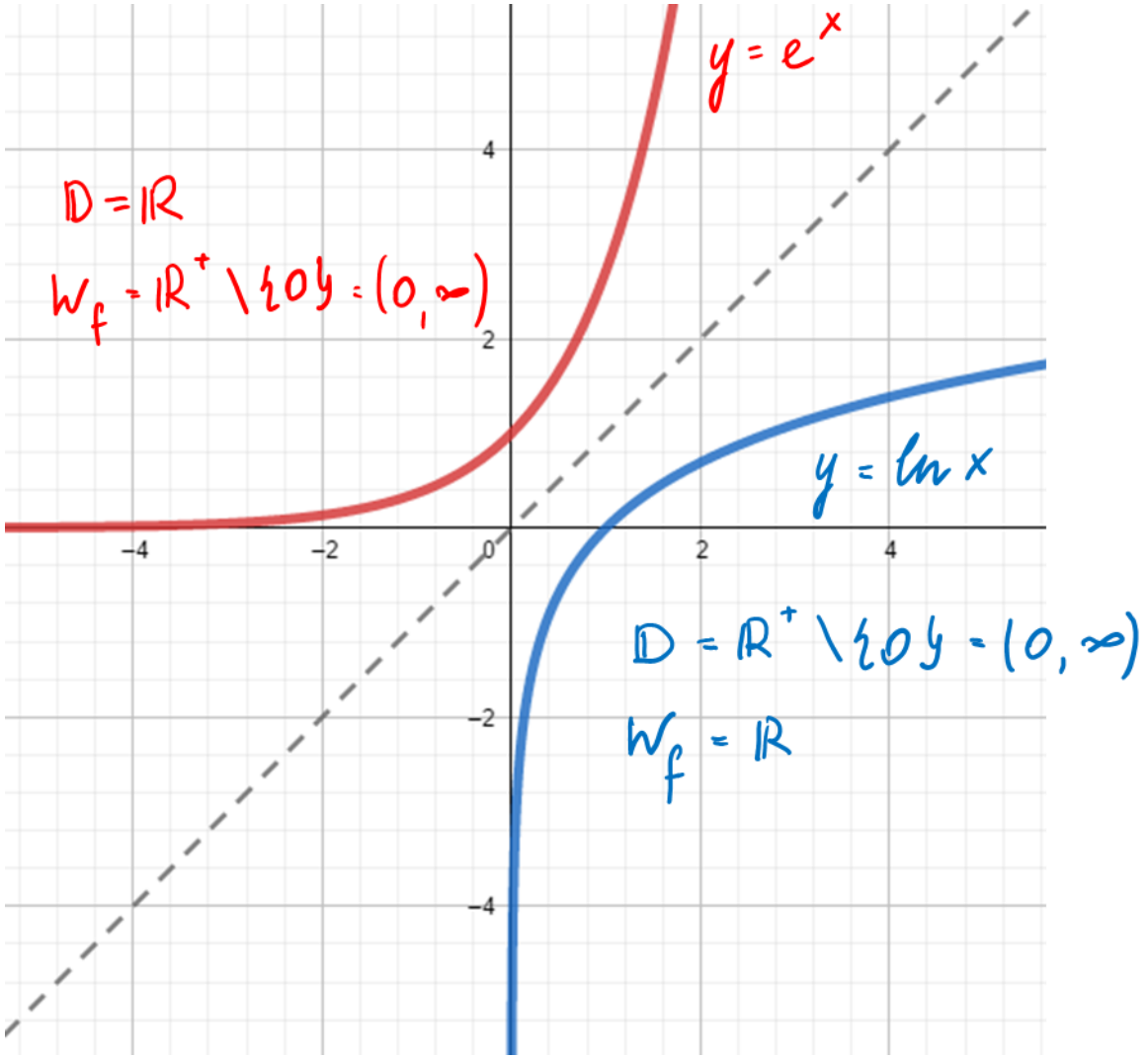
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Info: Umkehrbare Funktionen



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.1 Funktionsbegriff Folie 135

10.2 Lineare Funktionen (Geraden) Folie 140

10.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) Folie 149

10.4 Ganzrationale Funktionen Folie 155

10.5 Gebrochenrationale Funktionen Folie 159

10.6 Die Exponentialfunktion Folie 173

10.7 Die Logarithmusfunktion Folie 176

Info: Umkehrbare Funktion Folie 177

10.8 Trigonometrische Funktionen Folie 181

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

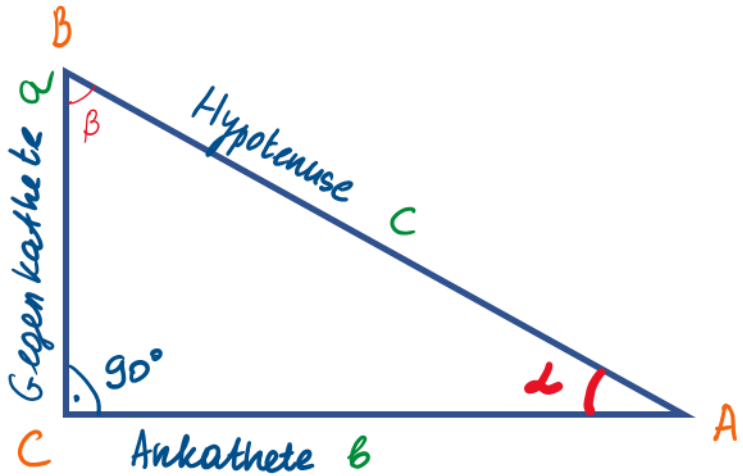
Definition am rechtwinkligen Dreieck (für Winkel von 0 bis 90 Grad)

Sinus α $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Kosinus α $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens α $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Kotangens α $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan b}$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

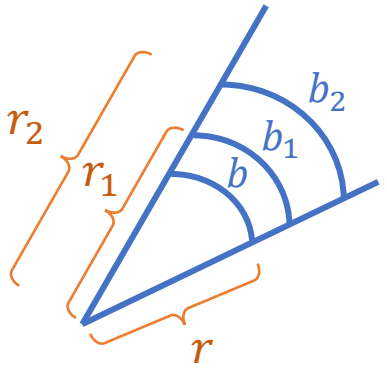
10.8 Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß

Ein Winkel α kann entweder im Gradmaß oder im Bogenmaß gemessen werden.

Das Bogenmaß x des Winkels α ist das Verhältnis der Bogenlänge zum Radius am Kreisausschnitt mit Mittelpunktswinkel α:

$$x = \frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2} = \frac{b}{r}$$



x ist eine dimensionslose Größe, unabhängig vom Kreisradius r.

Eine volle Umdrehung: $\alpha = 360° \cong$ Bogenmaß $x = 2\pi$

Bezeichnung: Werden Gradmaß und Bogenmaß nebeneinander benutzt, so bezeichnen wir den Winkel in Gradeinheiten mit α und in Bogeneinheiten mit x („Radiant“, abgekürzt „rad“)

Umrechnungsformel:

$$\frac{\alpha}{360^0} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\alpha = \frac{180^0}{\pi} \cdot x$$

$$x = \frac{\pi}{180^0}\alpha$$

Winkel werden immer ***gegen den Uhrzeigersinn*** als ***positiv*** betrachtet.

Beispiel a): Gradmaß → Bogenmaß

α	$90°$	45^0	110^0	$27{,}5^0$
x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{11}{18}\pi$	$0{,}48$

Beispiel b): Bogenmaß →Gradmaß

x	$\frac{\pi}{3}$	1	$2{,}5$
α	60^0	$57{,}3°$	$143{,}24$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

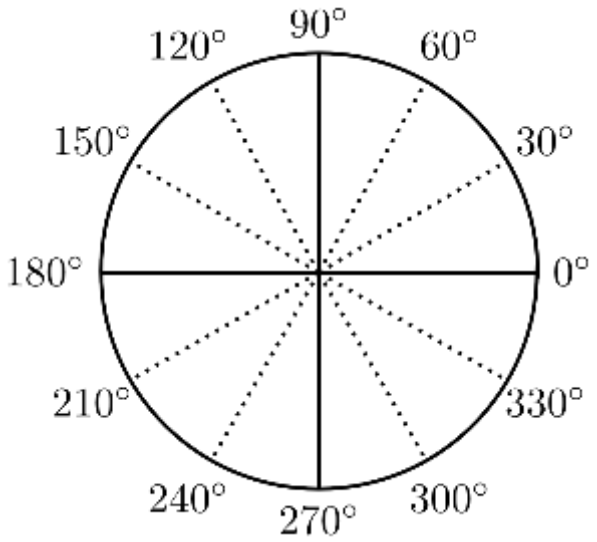
10.8 Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß - Wichtige Umrechnungen

→ Einige Bogenmaß-Werte sind besonders.

→ Die Werte aus der Tabelle sollten Sie *im Kopf* haben!

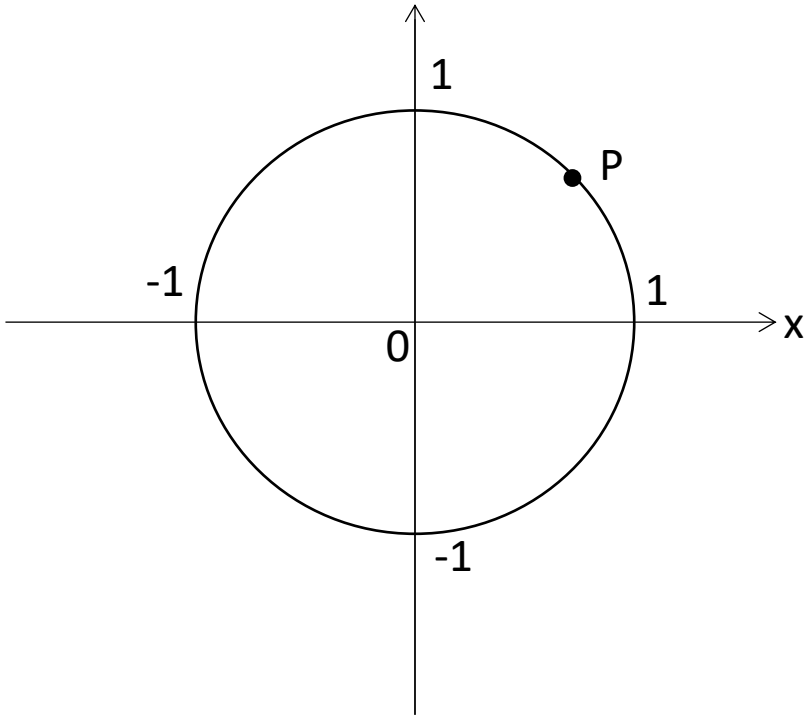
α_{DEG}	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
α_{RAD}	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)

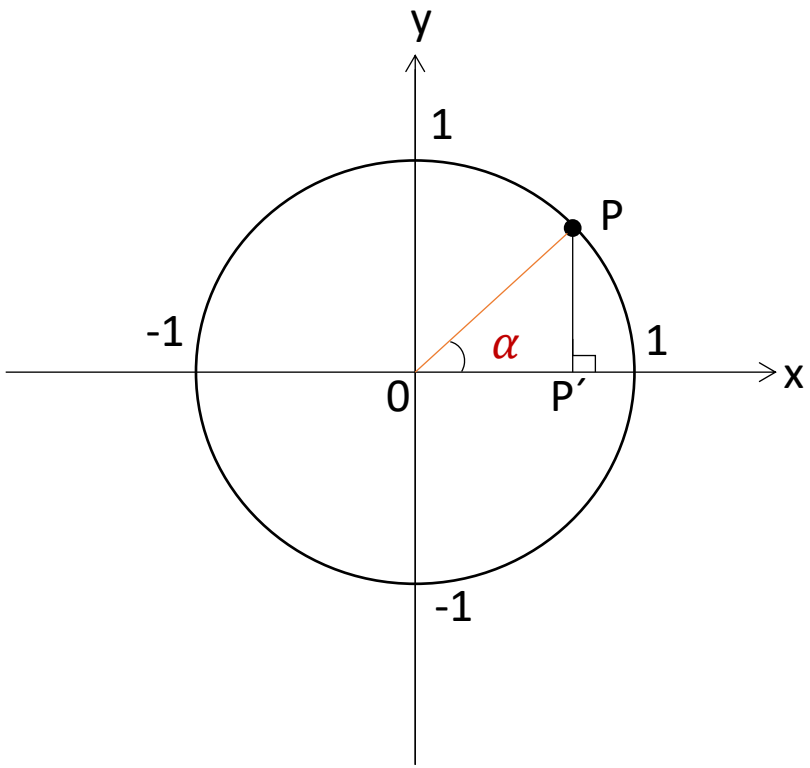


- Einheitskreis - ein Kreis im kartesischen Koordinatensystem mit Radius $r = 1$
- Wir stellen uns einen Punkt P vor, der sich auf dem Kreisrand gegen Uhrzeigesinn dreht und halten ihn in einer Position fest.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)



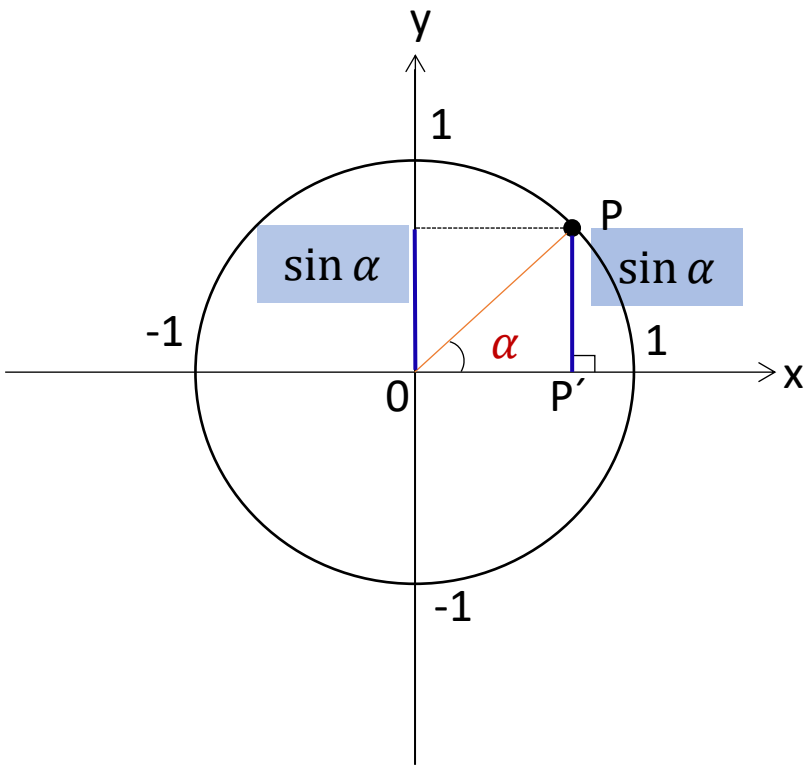
- Ein Lot vom Punkt P auf die x-Achse
- Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck
- Wir betrachten den Winkel $\alpha = POP'$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)

Sinus



$$\sin\alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{PP'}{1} = PP'$$

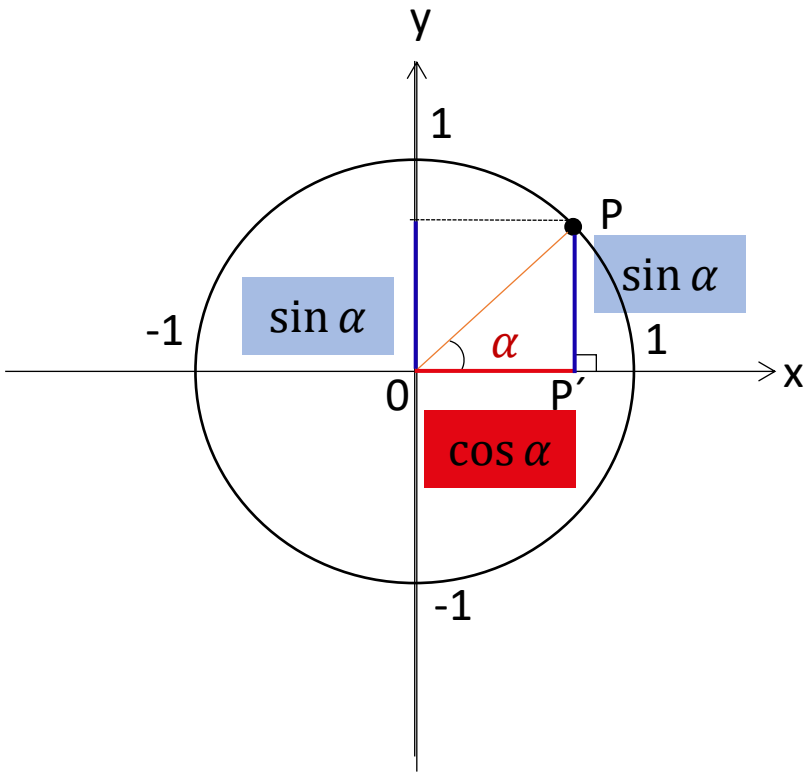
- Somit ist **Sinus** die Projektion auf die y-Achse
- Wenn der Punkt P sich weiter bewegt, verändert sich entsprechend die Projektion auf die y-Achse.
- Somit kann $\sin\alpha$ maximal **1** für 90° und minimal **-1** für 270° werden.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)

Kosinus



$$\cos\alpha = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

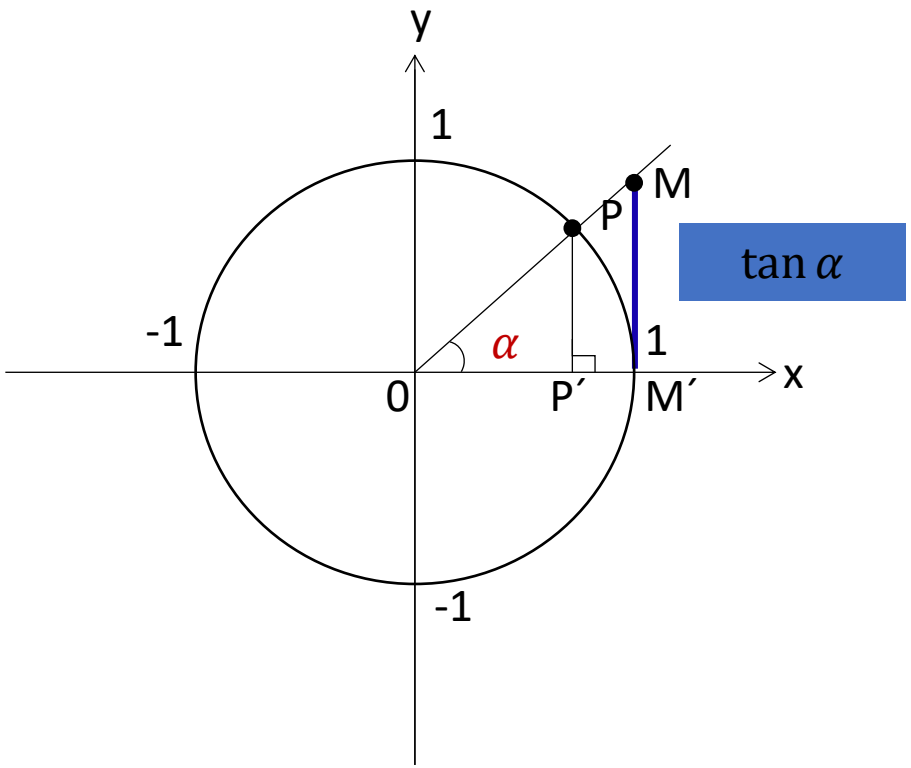
- Somit ist **Kosinus** die Projektion auf die x-Achse
- Wenn der Punkt P sich weiter bewegt, verändert sich entsprechend die Projektion auf die x-Achse.
- Somit kann $\cos\alpha$ maximal **1** für 0° und minimal **-1** für 180° werden.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)

Tangens



$$\tan\alpha = \frac{MM'}{OM'} = \frac{MM'}{1} = MM'$$

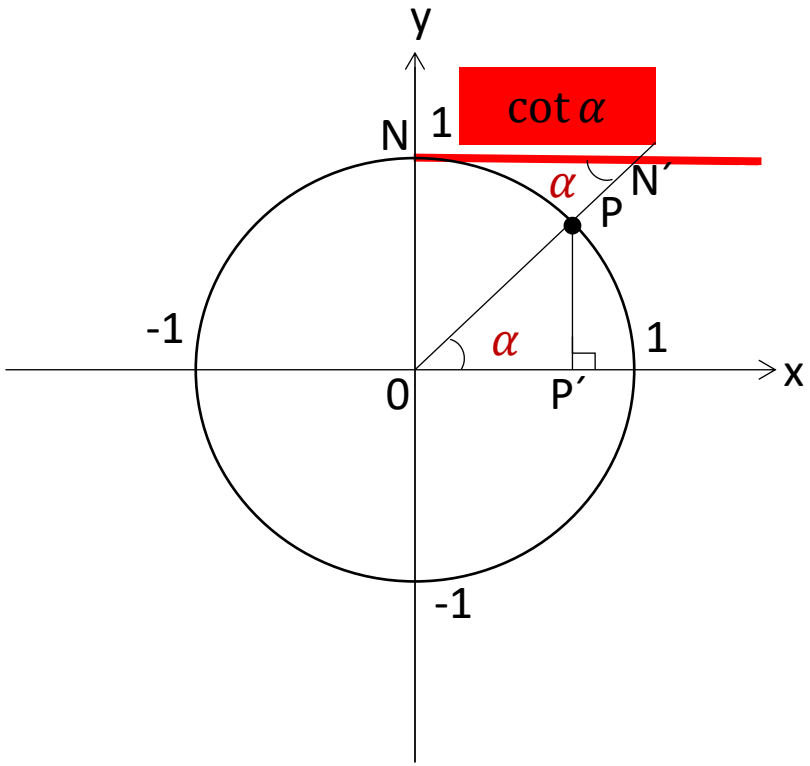
- Tangens ist für 0° gleich Null
- Tangens ist für 90° nicht definiert, weil OM' dann gleich Null ist. Durch Null dürfen wir nicht teilen.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)

Kotangens



- Wir verlängern OP bis es die Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, im Punkt N' schneidet.
- Winkel NN´O= α als Wechselwinkel

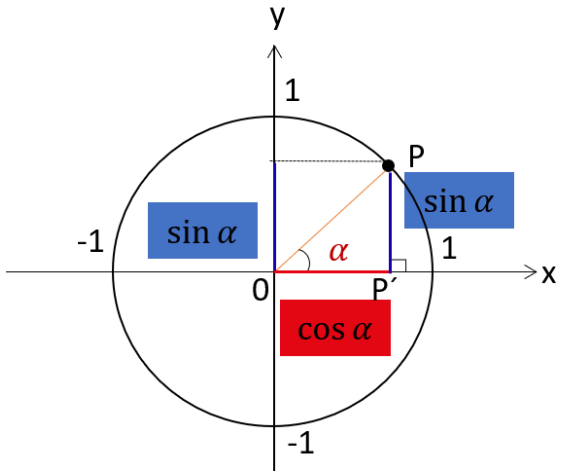
$$\cot\alpha = \frac{NN'}{ON} = \frac{NN'}{1} = NN'$$

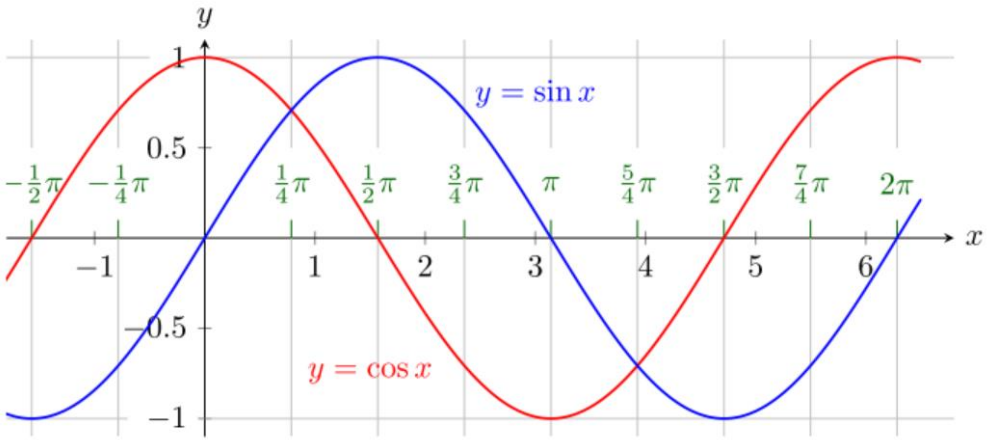
- Kotangens ist für 0° nicht definiert, denn dann ON ist gleich Null. Durch Null dürfen wir nicht teilen.
- Kotangens ist für 90° gleich Null.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)





Sinusfunktion

$f(x) = \sin x$

$f: D \to W_f$

$D = \mathbb{R}$

$W = [-1,1]$

$\sin(-x) = -\sin x$

→punktsymmetrisch

Nullstellen: $k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Kosinusfunktion

$f(x) = \cos x$

$f: D \to W_f$

$D = \mathbb{R}$

$W_f = [-1,1]$

$\cos(-x) = \cos(x)$

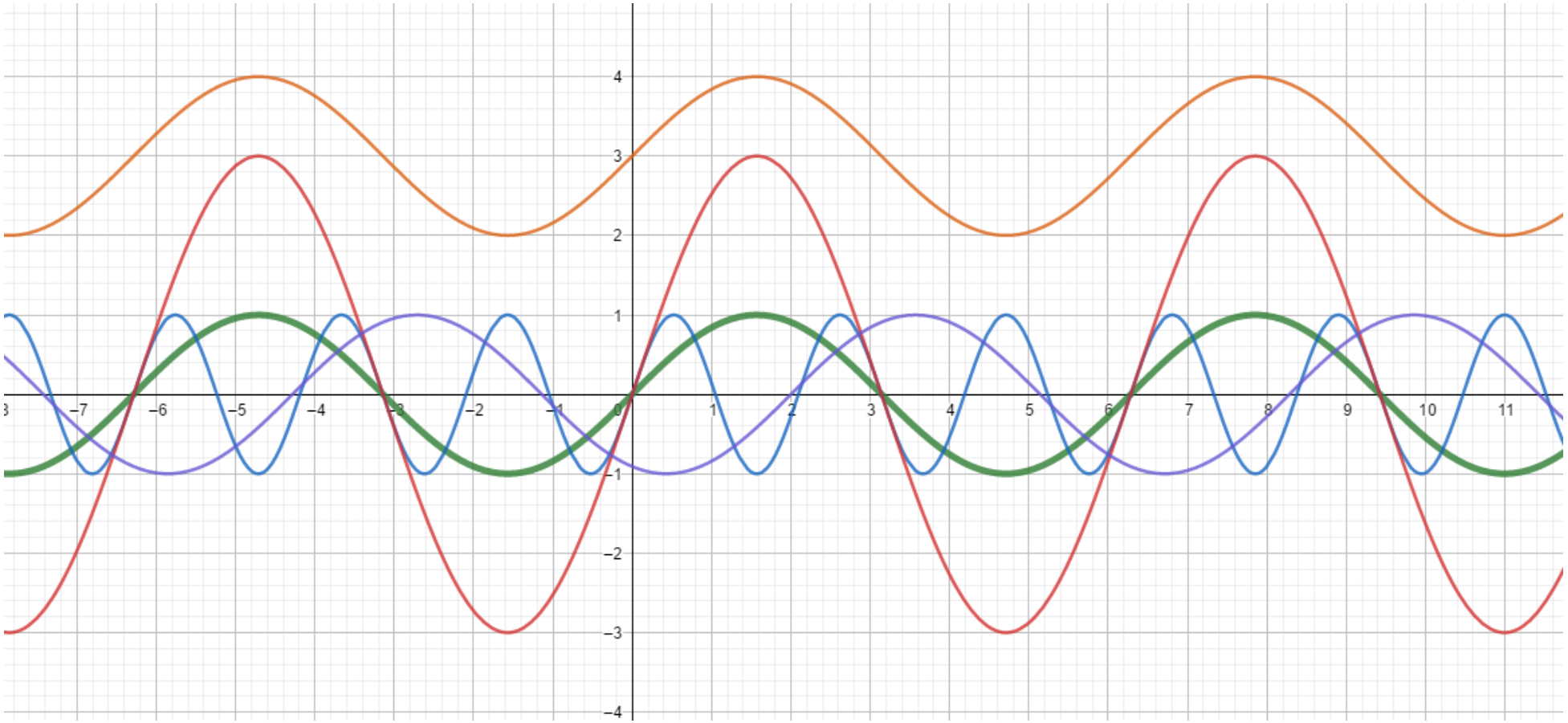
→ achsensymmetrisch

→ Nullstellen: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Änderung der Koeffizienten in der Funktion



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

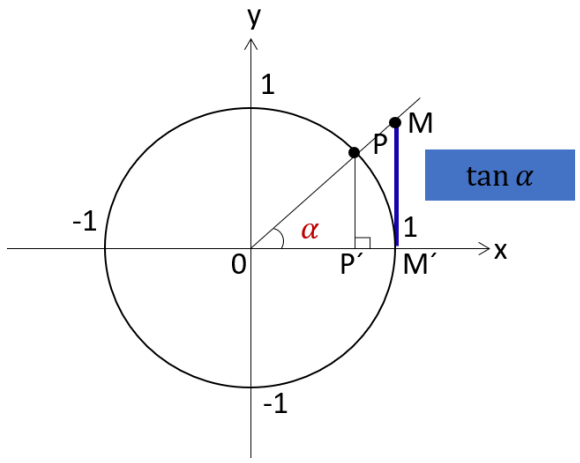
ausgezeichnet als:

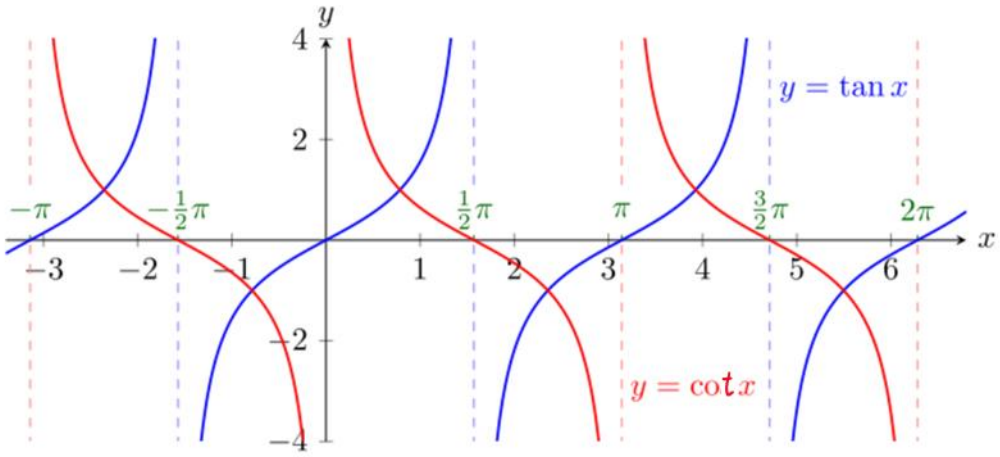
Innovative Hochschule

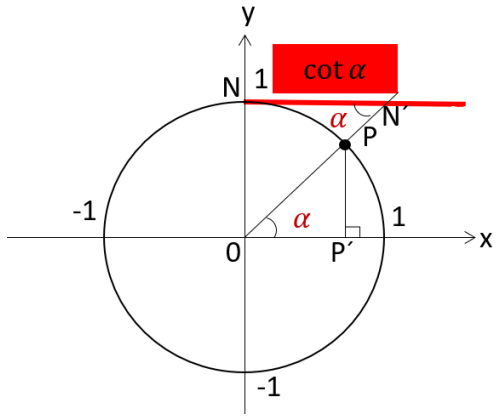
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis (für Winkel von 0 bis 360 Grad)







Tangensfunktion

$f(x) = \tan(x)$

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$W_f = \mathbb{R}$

$\tan(-x) = -\tan(x)$

→punktsymmetrisch

Nullstellen: $k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Kotangensfunktion

$f(x) = \cot(x)$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$W_f = \mathbb{R}$

$\cot(-x) = -\cot(x)$

→punktsymmetrisch

Nullstellen: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Wichtige Zusammenhänge

Aus der Geometrie am Einheitskreis (kongruente Dreiecke) leiten wir folgende Beziehungen ab ($0 \leq \alpha \leq 90\,°$):

	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$	$360° \pm \alpha$
sin	$\cos(\alpha)$	$\mp \sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\pm \sin(\alpha)$
cos	$\mp \sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\pm \sin(\alpha)$	$\cos \alpha$
tan	$\mp \cot(\alpha)$	$\pm \tan(\alpha)$	$\mp \cot(\alpha)$	$\pm \tan(\alpha)$
cot	$\mp \tan(\alpha)$	$\pm \cot(\alpha)$	$\mp \tan(\alpha)$	$\pm \cot(\alpha)$

Lässt man mehrere Umläufe zu, so ergibt sich die **Periodizität** der Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + k \cdot 360°)\,, \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + k \cdot 360°)\,, \\ \tan(\alpha) &= \tan(\alpha + k \cdot 180°)\,, \\ \cot(\alpha) &= \cot(\alpha + k \cdot 180°)\,. \end{aligned}$$

→ $\sin x$ und $\cos x$ sind periodisch mit der Periode 2π
→ $\tan x$ und $\cot x$ sind periodisch mit der Periode π

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Wichtige Zusammenhänge

Spezielle Werte (im Kopf behalten!)

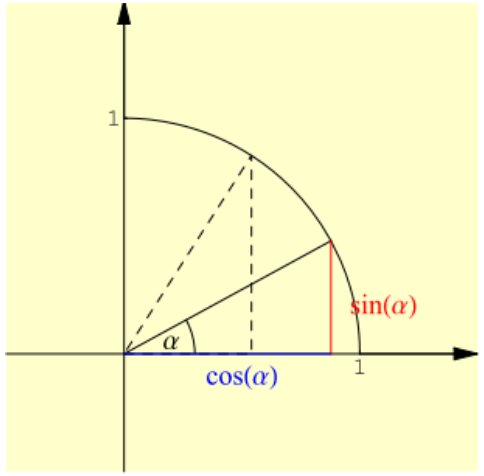
x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	n.d.
$\cot x$	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	n.d.	0

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Wichtige Zusammenhänge

Trigonometrischer Satz des Pythagoras:



Wir entnehmen der Darstellung am Einheitskreis die wichtige Beziehung:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Daraus leiten wir folgende Tabelle von Umrechnungsformeln $(0 < \alpha < 90°)$ ab.

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$\sin(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\sqrt{1-(\cos(\alpha))^2}$
$\cos(\alpha)$	$\sqrt{1-(\sin(\alpha))^2}$	$\cos(\alpha)$
$\tan(\alpha)$	$\dfrac{\sin(\alpha))}{\sqrt{1-(\sin(\alpha))^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-(\cos(\alpha))^2}}{\cos(\alpha)}$
$\cot(\alpha)$	$\dfrac{\sqrt{1-(\sin(\alpha))^2}}{\sin(\alpha)}$	$\dfrac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-(\cos(\alpha))^2}}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Wichtige Zusammenhänge

Additionstheoreme :

$$\begin{aligned}\sin(x_1 \pm x_2) &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2\\ \cos(x_1 \pm x_2) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2\end{aligned}$$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	1	0	$\pm\infty$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	1	0	$\pm\infty$	0
180°	0	−1	0	$\pm\infty$
270°	−1	0	$\pm\infty$	0

Beispiel 1:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

Beispiel 2:

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x$$

Doppelwinkelfunktionen

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

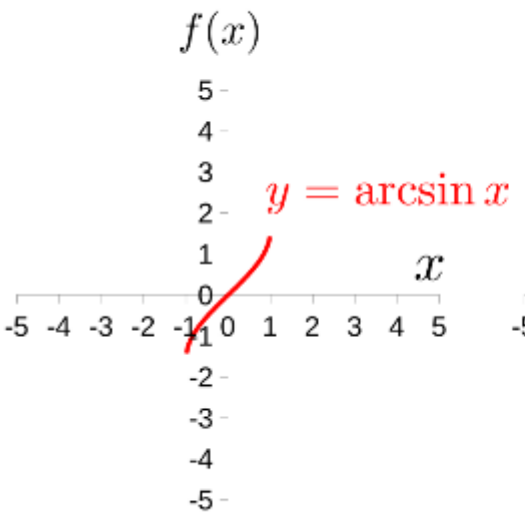
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

10.8 Trigonometrische Funktionen

Umkehrfunktionen

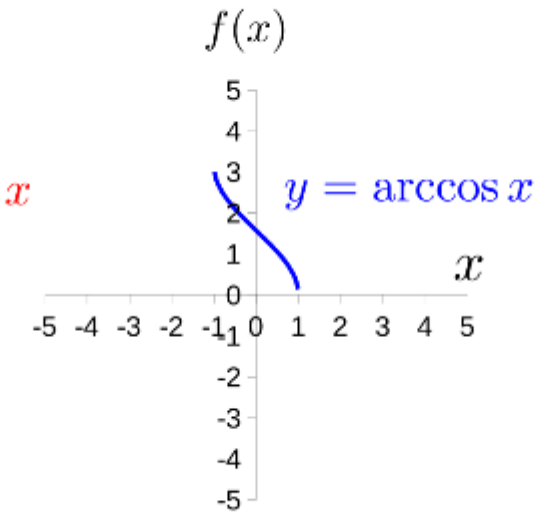
Umkehrfunktion zu
$y = \sin x$
mit $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$:

$y = \arcsin x$ mit
$x \in [-1; 1]$



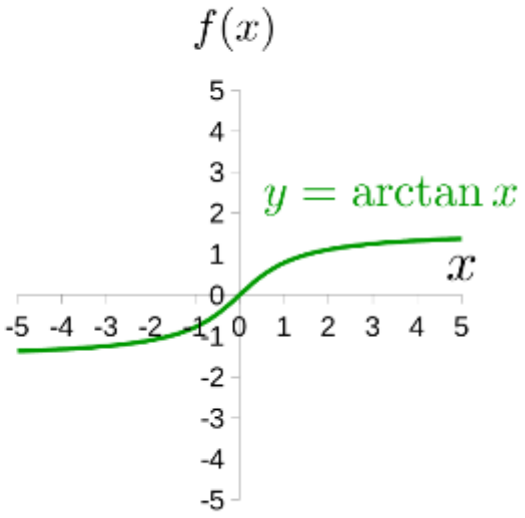
Umkehrfunktion zu
$y = \cos x$
mit $x \in [0; \pi]$:

$y = \arccos x$ mit
$x \in [-1; 1]$



Umkehrfunktion zu
$y = \tan x$
mit $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$:

$y = \arctan x$ mit
$x \in \mathbb{R}$



Beispiel:

$\sin x = 0{,}5$

$\Rightarrow x = \arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$

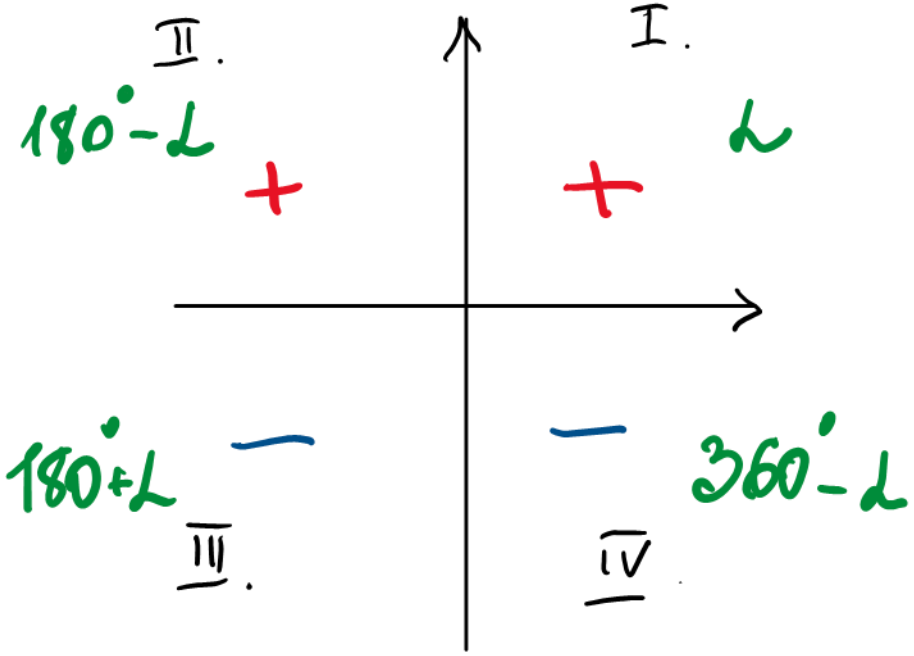
→ Im **Taschenrechner**:
Taste $\sin^{-1}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

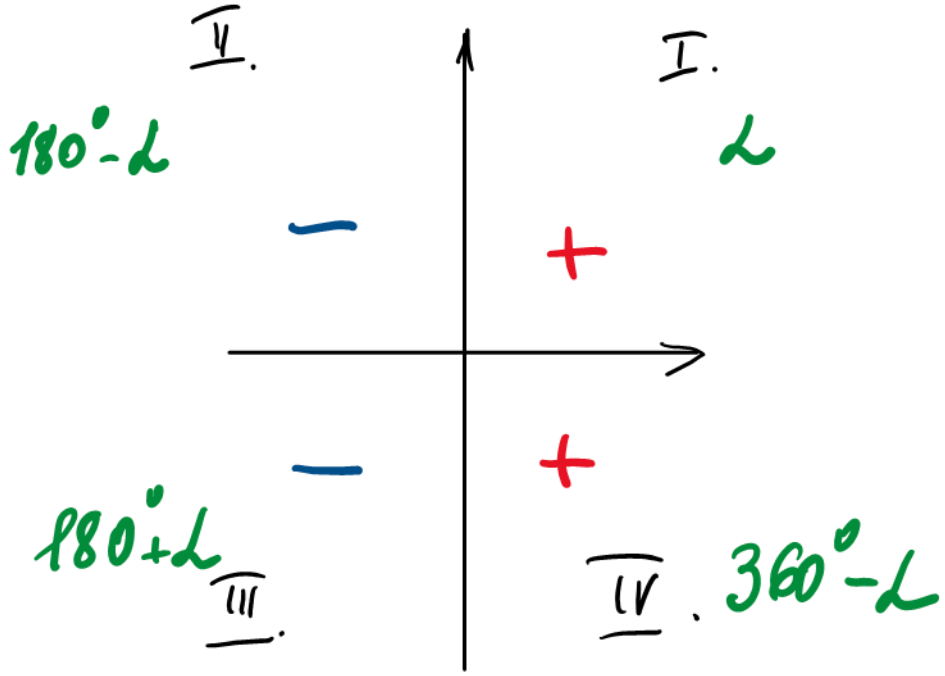
10.8 Trigonometrische Funktionen

Sinuskreuz - Kosinuskreuz

Sinuskreuz



Kosinuskreuz



Beispiel: $\sin 104° = \sin(180° - \mathbf{76°}) = \sin \mathbf{76°}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

11. Ungleichungen

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

Äquivalente Umformungen

Ungleichungen liegen vor, wenn man zwei Rechenausdrücke (Terme) durch eines der Relationszeichen $<, >, \leq$ oder $\geq$ miteinander verbindet.

Ähnlich wie Gleichungen lassen sich Ungleichungen in vielen Fällen durch **äquivalente Umformungen** lösen:

1. Zu **beiden Seiten** der Ungleichung dürfen beliebige Terme **addiert** oder **subtrahiert** werden.
2. Eine Ungleichung darf mit einem **beliebigen positiven Term multipliziert** bzw. durch diesen dividiert werden.
3. Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen **negativen Term** multipliziert bzw. durch diesen dividiert werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen umgedreht wird.
4. Die **beiden Seiten** einer Ungleichung dürfen miteinander **vertauscht** werden, wenn gleichzeitig das **Relationszeichen umgedreht** wird.

→ Die Lösungsmengen von Ungleichungen sind in der Regel Intervalle.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Graphische Lösungsmethode

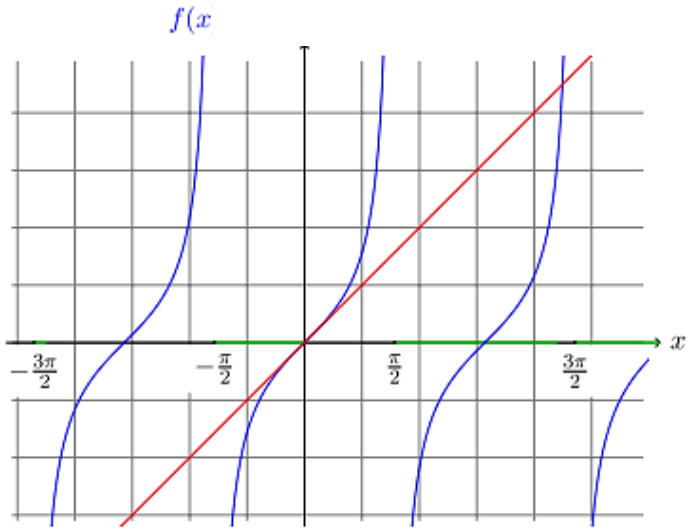
Graphische Lösung

Jede Ungleichung kann man auf die Form $f(x) > 0$ bzw. $f(x) \geq 0$ bringen.

Die Lösungsmenge der Ungleichung sind dann alle Intervalle der reellen Zahlen, in denen der Graph der Funktion $f(x)$ oberhalb der x-Achse verläuft. Dazu kann man z.B. die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse bestimmen, d.h. die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$, und dann für die dazwischen liegenden Intervalle prüfen, ob der Graph für dieses Intervall jeweils oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft.

Gegeben ist folgende Ungleichung:

$$\tan x < x$$



Betrachte die Graphen von $\tan x$ und x. Diejenigen Bereiche der x-Achse, die die Ungleichung erfüllen, zählen zur Lösungsmenge (hier grün markiert).

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Lineare Ungleichungen – mit einem Parameter – Fallunterschied

Welche x erfüllen folgende Ungleichung:

$$a\,x + \frac{2}{3} \geq -\frac{1}{7}?$$

Dabei ist a eine beliebige, feste Zahl.
Wir formen um:

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Lineare Ungleichungen - Bruch

Welche x erfüllen die Ungleichung

$$\frac{2x-3}{x-3} \geq 4?$$

Die Zahl $x = 3$ muss von vorne herein ausgeschlossen werden, weil sonst auf der linken Seite durch Null dividiert wird.
Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) $x < 3$ *bzw.* $x - 3 < 0$ *und*

(2) $x > 3$ *bzw.* $x - 3 > 0$.

Wir haben also zwei Probleme. Wir suchen Lösungen der Ungleichungen im Fall (1) und im Fall (2).

(1) Multiplikation der Ungleichung mit $x - 3 < 0$ *ergibt (Relation wird umgekehrt):*

(2) Multiplikation der Ungleichung mit $x - 3 > 0$ *ergibt (Relation bleibt erhalten):*

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

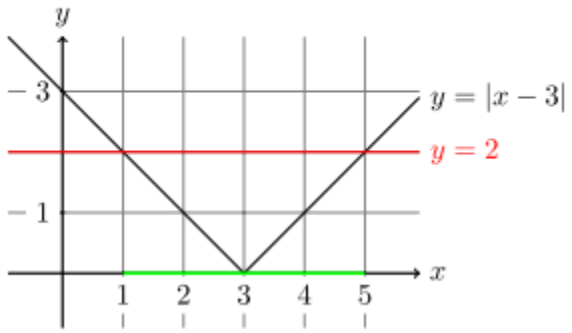
Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Lineare Ungleichungen - Betragsungleichungen

$$|x-3| \leq 2$$



Wir betrachten eine Ungleichung mit einer Betragsfunktion und wenden auch hier eine Fallunterscheidung an:

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Quadratische Ungleichungen

a) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$2x^2 + 5x + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + 2{,}5x + 1\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2{,}5x + 1 > 0$$

$$x_1 = -2 \wedge x_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x + 0{,}5) > 0$$

b) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$-x^2 - 4x - 4 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x = -2$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiele

Ungleichungen n-ten Grades

a) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$(x+7)(x-3)(x+1)(x-2)x \leq 0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -7] \cup [-1,0] \cup [2,3]\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \vee -1 \leq x \leq 0 \vee 2 \leq x \leq 3\}$$

b) Lösen Sie folgende Ungleichung:

$$x(2+x)^2(x-1)(x-2)^3 \geq 0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x = -2 \vee 0 \leq x \leq 1 \vee x \geq 2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | x \in \{-2\} \cup [0,1] \cup [2, +\infty)\}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

12. Elementargeometrie

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

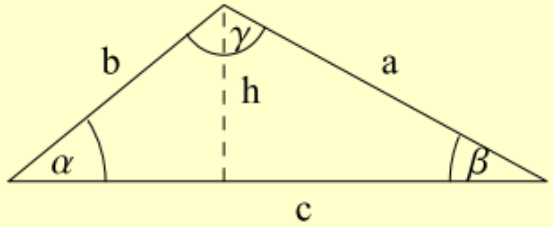
Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

12.1 Flächeninhalte

- Quadrat mit der Kantenlänge a: $A = a^2$
- Rechteck mit den Seiten a und b: $A = a \cdot b$
- Dreieck mit der Grundseite g und der Höhe h: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
  oder $A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$

Heron‘sche Flächenformel



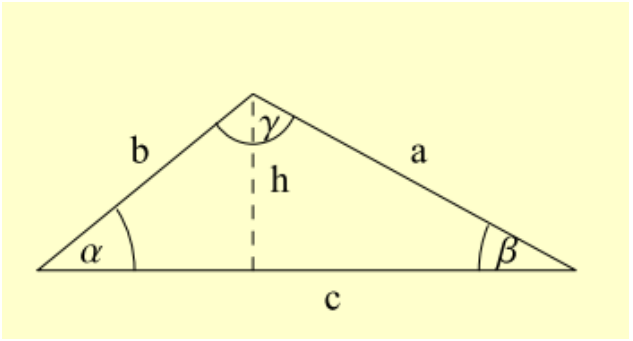
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

12.2 Sinussatz

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ **Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich** 180".

In einem beliebigen Dreieck verhalten sich zwei Seiten eines Dreiecks wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}; \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}; \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

12.3 Kosinussatz

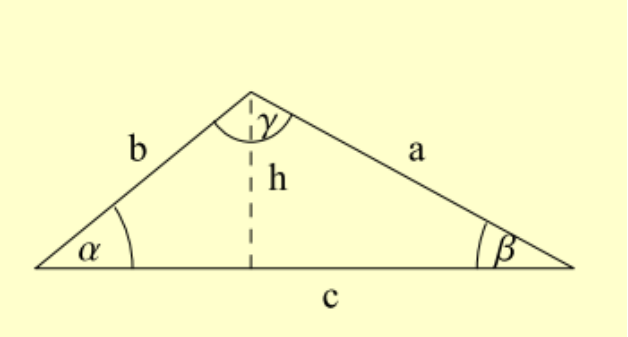
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ **Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich** 180".

In einem beliebigen Dreieck ist das Quadrat einer Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus beiden Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\alpha)\,,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos(\beta)\,,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)\,.$$



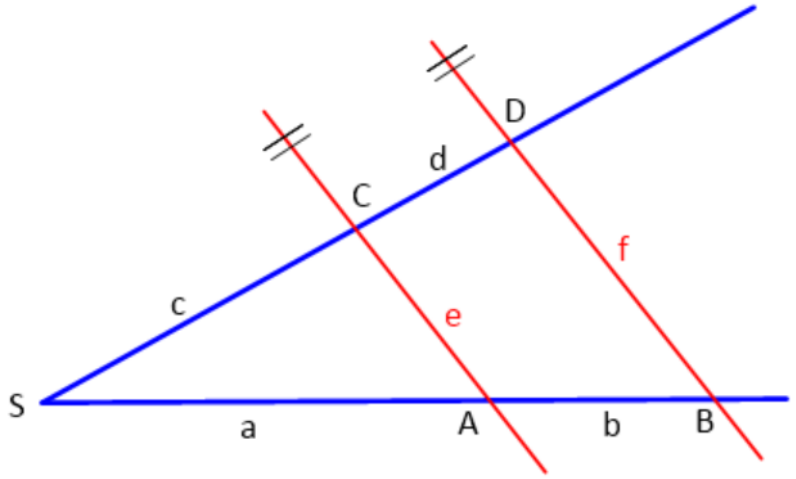
Beispiel: Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 9, b = 3,5, c = 7$. Man berechne die Kosinus der Winkel in dem Dreieck.

12.4 Strahlensätze

Werden zwei von einem gemeinsamen Punkt S ausgehende Strahlen von Parallelen geschnitten, so gilt:

1) Die Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}; \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



2) Die Abschnitte auf den beiden Parallelen verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl vom Punkt S aus gemessen:

$$\frac{e}{f} = \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

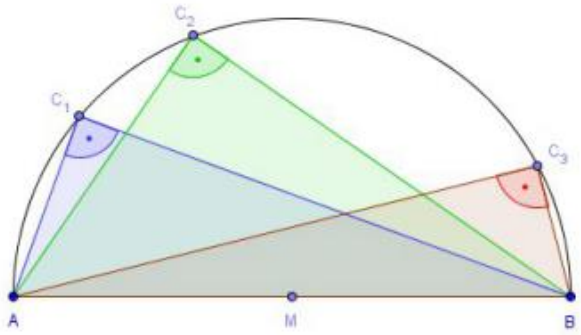
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

12.5 Sätze über das rechtwinklige Dreieck

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Satz des Thales

Der Satz des Thales sagt aus, dass jedes Dreieck, welches aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises (Thaleskreis) und einem weiteren Punkt dieses Halbkreises konstruiert wird, **rechtwinklig** ist. Dabei ist immer der Winkel auf dem **Halbkreisbogen** rechtwinklig.



Satz des Pythagoras

"In einem **rechtwinkligem** Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypothenusenquadrat."
Dieser Satz gilt auch in seiner Umkehrung:
"Wenn in einem Dreieck die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypothenusenquadrat ist, ist das Dreieck rechtwinklig."

"Wenn in einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c
$a^2 + b^2 = c^2$ oder $a^2 + c^2 = b^2$ oder $b^2 + c^2 = a^2$ gilt, ist das Dreieck **rechtwinklig**.

12.5 Sätze über das rechtwinklige Dreieck

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

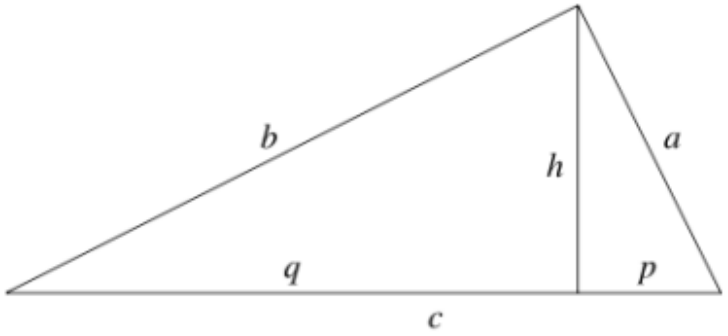
$$h^2 = p \cdot q$$

Dabei ist h die Höhe des Dreiecks, p und q sind die Hypotenusenabschnitte der Hypotenuse $c = p + q$.

Kathetensatz

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a^2 = c \cdot q \text{ und } b^2 = c \cdot q$$

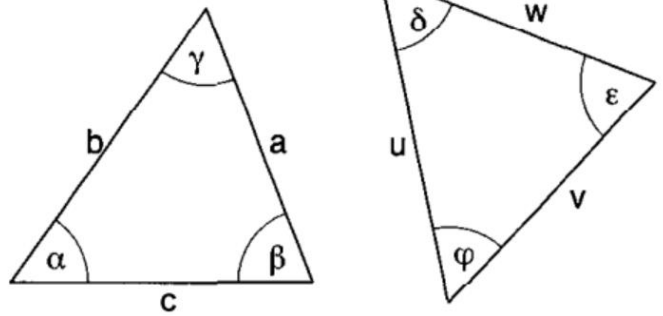


12.6 Kongruente Dreiecke

Zwei ebene Figuren hießen **kongruent** oder **deckungsgleich**, wenn sie in allen Bestimmungstücken übereinstimmen.

Vier Kongruenzsätze für Dreiecke:
Zwei Dreiecke sind **kongruent** wenn sie in

1. drei Seiten oder
2. zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel oder
3. zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel oder
4. einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.



*Zwei Dreiecke ABC und DEF heißen **ähnlich**, wenn ihre Winkel paarweisegleich sind.*
***Ähnliche** Dreiecke stimmen in Verhältnis ihrer Seitenlängen überein.*

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

12.7 Winkelpaare

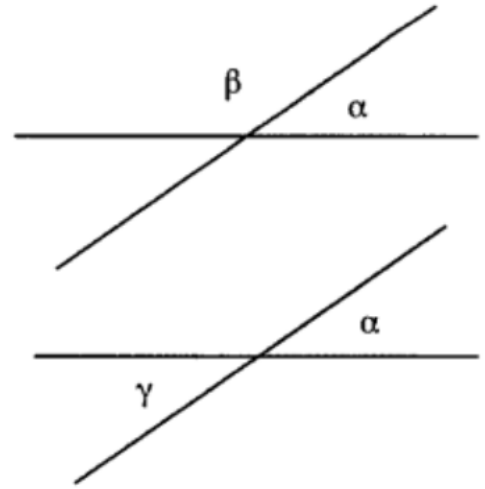
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

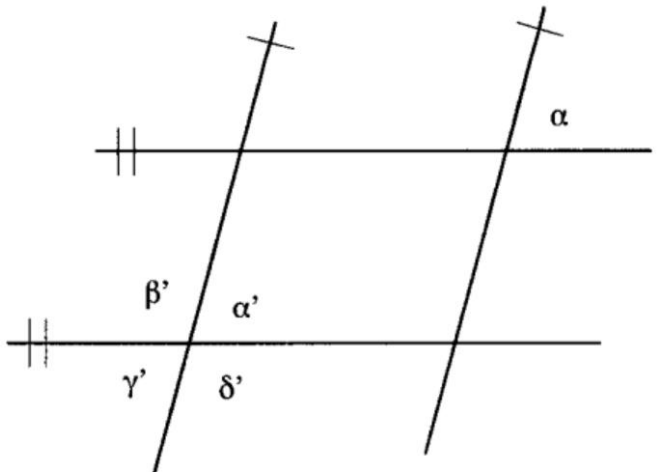
Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Neben- und Scheitelwinkel:



Parallelwinkel:



Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13. Vektoren – Grundbegriffe

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

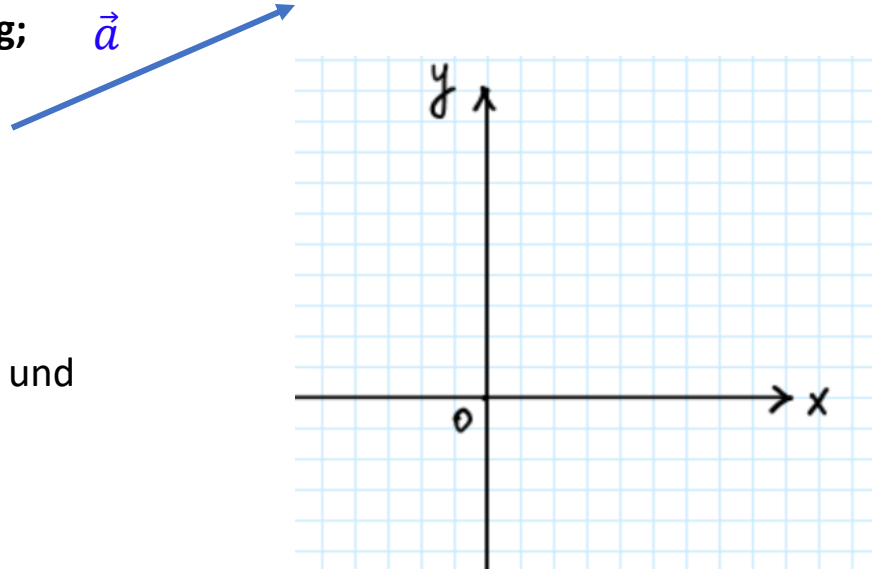
Definition – Koordinaten

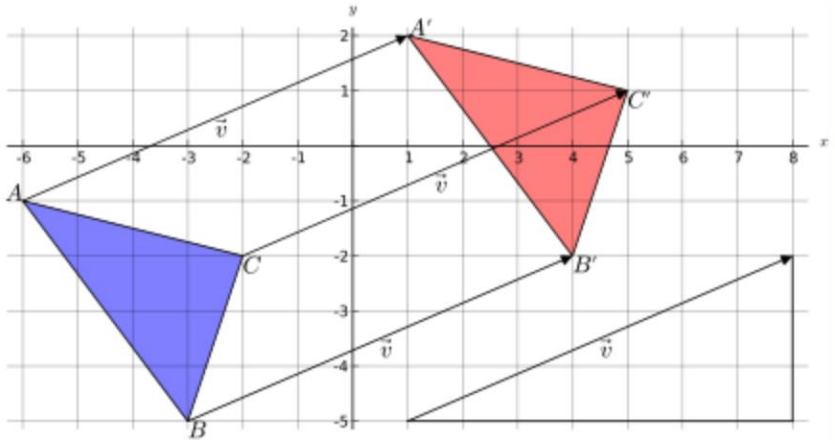
- Vektoren – Objekte mit einer vorgegebenen **Länge** und **Richtung;**
- $|v|$ ist **Betrag** des Vektors $\vec{v}$.
- **Anwendung:** Darstellung der physikalischen Kräfte wie Geschwindigkeit oder Strömungsrichtungen im Raum;
- Vektoren – Parallelverschiebungen von Elementen
  - wir verschieben den Punkt P_1 um v_1 Einheiten in x-Richtung und v_2 Einheiten in y-Richtung.
  - P_1P_2 – ein **Verschiebungspfeil**
  - Parallelverschiebung eines Dreiecks um den Vektor $\vec{v}$
  - Schreibweise – **Zahlenspalte (Koordinaten eine Vektors):**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Ermitteln von Vektoren: „Spitze minus Schaft“

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} A'_x - A_x \\ A'_y - A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-6) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$





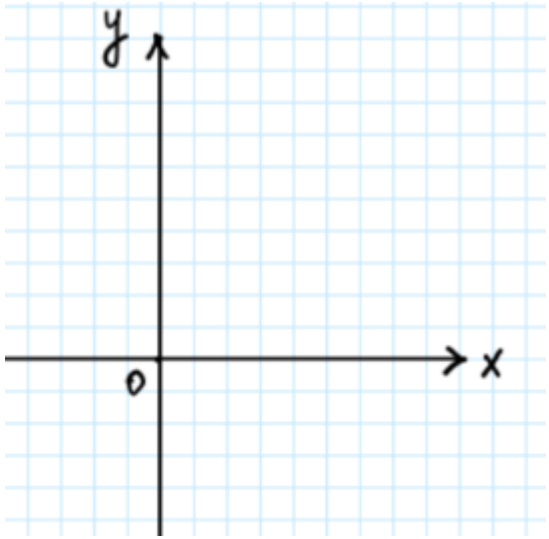
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Vektor#/media/Datei:Vektoren.svg

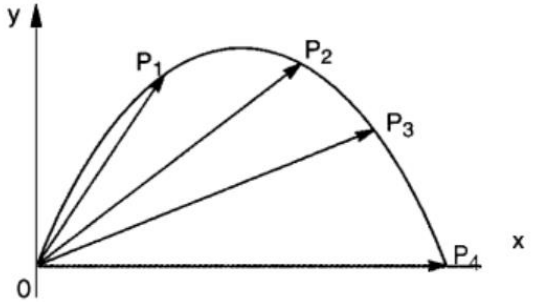
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Begriffe

- **Nullvektor** – Vektor der Länge Null $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. $\left|\vec{0}\right| = 0$
- Zwei Vektoren sind **gleich**, senn ihre Koordinaten übereinstimmen, d.h.
  - gleiche Länge = Betrag
  - gleiche Richtung
- **Ortsvektor** (Koordinatenvektor, Zeiger, „gebundener Vektor“)
  - Gegeben Punkt $(3|2)$
  - $\overrightarrow{OP}$ – Pfeil zum Punkt P vom Ursprung O
  - Legen wir fest, dass die Zahlenspalte $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ nur durch den Pfeil $\overrightarrow{OP}$ dargestellt wird (und nicht durch andere verschiebungsgleiche zu $\overrightarrow{OP}$), dann nennt man $\overrightarrow{OP}$ ein **Ortsvektor**.
  - Die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ sind einfach die **Koordinaten** des **Punktes P**
  - Andere Schreibweise: $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - **Beispiel**: Ortsvektoren der Bahnkurve eines schief nach oben geworfenes Körpers





Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Ortsvektor eines Punktes

- **Ortsvektor eines Punktes - Aufgabe**
  Eine Verschiebung ist durch den Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bestimmt, wobei A(2|4) und B(5|1) ist. Für welchen Punkt ist $\vec{a}$ Ortsvektor?

Lösung: $P(3|-3)$

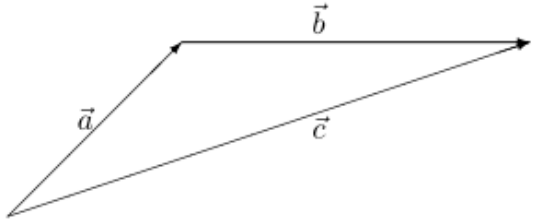
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

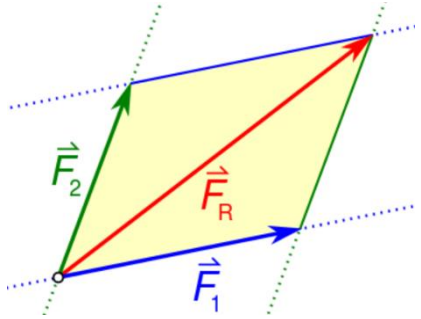
13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Addition und Subtraktion

- **Addition**

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

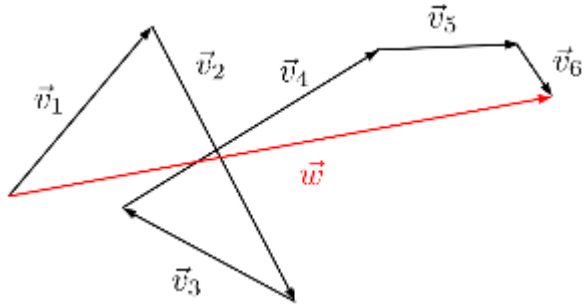




$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

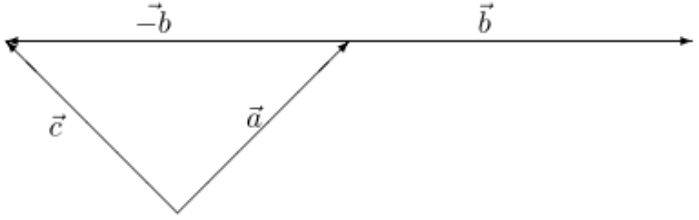
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Summe einer geschlossenen Vektorkette ist gleich $\vec{0}$



- **Subtraktion**

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

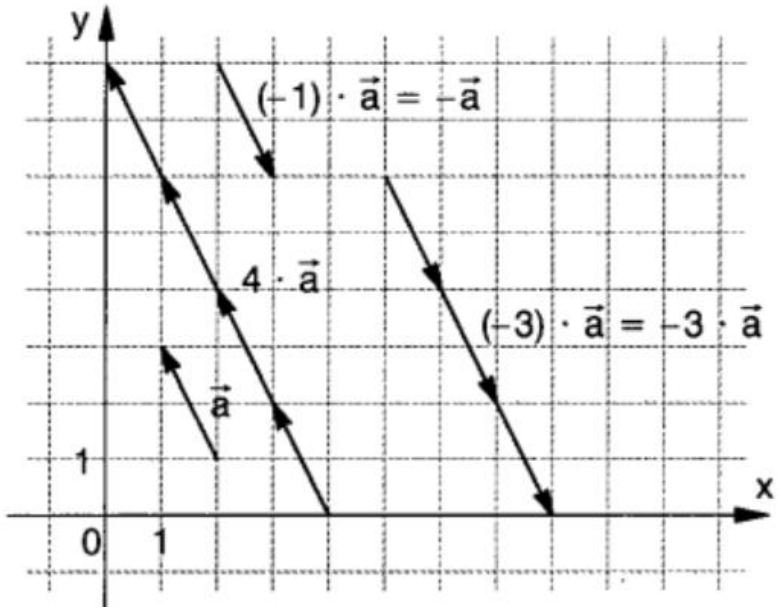
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Multiplikation mit einem Skalar

- **Vielfaches - Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar k :**



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_1 \\ k \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Betrag

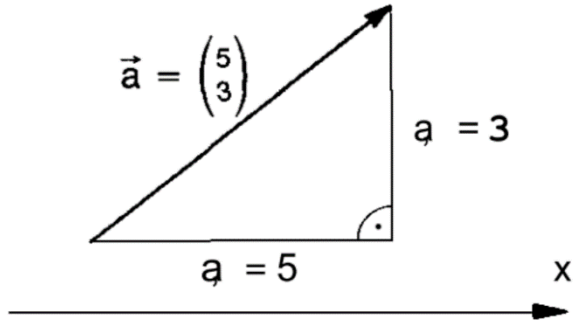
- **Betrag:**

Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, so heißt $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ **Betrag** oder **Länge von $\vec{a}$**.
Der Betrag von $\vec{a}$ wird auch mit a bezeinet.

- Der **Betrag** eines Vektors ist – geometrisch veranschaulicht – gleich (dem Zahlenwert) der Länge eines Pfeiles, der den Vektor darstellt.
- Die Formel für Betrag lässt sich aus dem Pythagoras-Satzes ableiten:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{5^2 + 3^2}$$

- **Beispiel:** Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
  Lösung: $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$



Andere Bezeichnung für Betrag **„Norm eines Vektors“**:

$\|\vec{x}\|$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

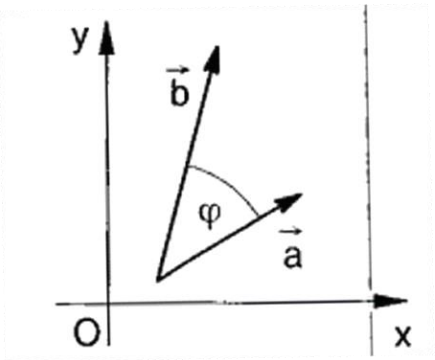
Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt

- **Skalarprodukt (inneres Produkt):**
  - Multiplikation zweier Vektoren
  - Das Ergebnis ist ein Skalar (reelle Zahl), **kein Vektor**!
    Vektor „mal“ Vektor = Skalar

Skalarprodukte zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =< \vec{a}, \vec{b} >= |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\phi = a_x b_x + a_y b_y$$

Wobei ϕ der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel $0° \leq \phi \leq 180°$ ist.



- **Bemerkung**: φ ist der kleinere der beiden Winkel, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bei **gleichem Fußpunkt** miteinander bilden.
- **Anwendung**: Arbeit in der Mechanik ist Skalarprodukt von Kraft und Weg.
- Aus der Formel ergibt sich die Berechnung vom Winkel:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt

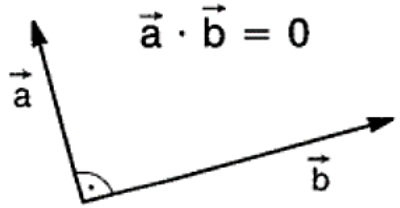
- **Skalarprodukt - Spezialfälle:**

  Rechter Winkel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = 0$ (siehe Abschnitt 12.5.2.4 a

  Paralelle Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

  Entgegengesetzte Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -a \cdot b \Rightarrow \cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

  Gleiche Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 0° = a^2$



- **Rechengesetze**

  Assoziatives Gesetz: Ist ungültig: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

  Kommutatives Gesetz: Ist gültig: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

  Distributives Gesetz: Ist gültig: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt

- **Skalarprodukt - Beispiele:**

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ -1 \end{pmatrix}$; berechne b_x so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lösung

Zu **a)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 2.$

Zu **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot b_x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_x = 2.$

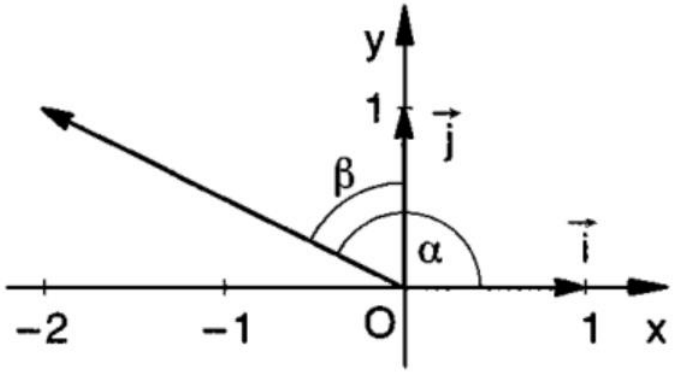
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Rechnen mit Vektoren – Skalarprodukt

- **Skalarprodukt – Winkel zwischen zwei Vektoren:**

Welche Winkel schließt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den beiden Koordinatenachsen ein?



Lösung:

Die gesuchten Winkel α und β sind gerade die Winkel, die der Vektor $\vec{a}$ mit $\vec{i}$ bzw. $\vec{j}$ einschließt.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot 1} = \frac{-2\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot 1} = \frac{-2\cdot 0 + 1\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 153{,}4°, \qquad \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}4°.$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

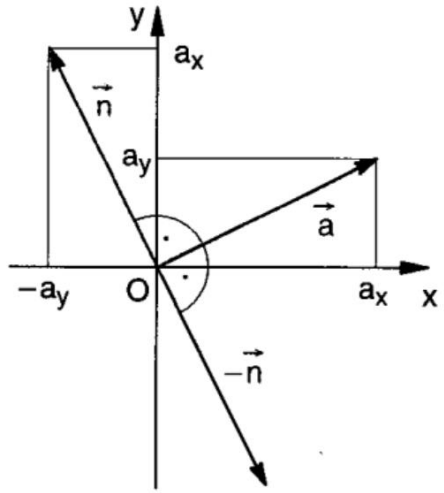
Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

- **Kollineare Vektoren** (Parallel, anti-parallel oder auf gleicher Gerade)
  - Algebraisch ausgedrückt: **linear abhängig** ($\vec{b} = \lambda\vec{a}$)
- **Komplanare Vektoren –** Vektoren, welche alle auf der gleichen Fläche liegen.
  - Algebraisch ausgedrückt: **lineare Kombination** ($\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}$)
- **Inverser Vektor** (Gegenvektor) zu einem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$:

$$-\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$

- **Normalvektor** (Normalenvektor) $\vec{n}$ zu einem Vektor $\vec{a}$ – ein Vektor, der orthogonal (d. h. rechtwinklig, senkrecht) auf dem Vektor $\vec{a}$ steht ($\vec{n} \perp \vec{a}$) und gleiche Länge wie Vektor $\vec{a}$ hat .
  - Es gibt zwei Normalvektoren zu einem Vektor $\vec{a}$ (in $\mathbb{R}^2$)
  - $\vec{n}$ und $-\vec{n}$ erhält man durch Vertauschen der Koordinaten von $\vec{a}$ und Wechsel des Vorzeichens bei einer der beiden Koordinaten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \text{ und } -\vec{n} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

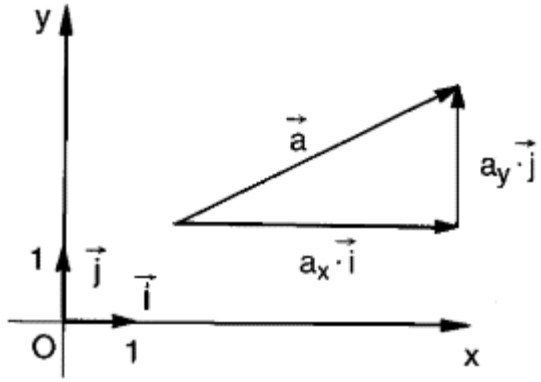
- **Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ (normierter Vektor) –** Vektor mit der Länge 1: $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

- **Komponentendarstellung eines Vektors in $\mathbb{R}^2$**

  - **Einheitsvektoren in Richtung Koordinatenachsen**:

    $\vec{\imath} = \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung x-Achse

    $\vec{\jmath} = \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Richtung y-Achse

  - Jeder Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ kann in Richtung der beiden Koordinatenachsen zerlegt werden:

    $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} = a_x \cdot \vec{e}_1 + a_y \cdot \vec{e}_2$$

  - **Vektorkomponenten**: $a_x \cdot \vec{\imath}$ und $a_y \cdot \vec{\jmath}$

  - **Vektorkoordinaten** (**skalare Komponenten**): a_x und a_y

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

- **Einheitsvektoren als Richtungsvektoren (normierter Vektor)**
  - Vektoren werden oft verwendet, um Richtungen anzugeben.
  - Dabei ist der Betrag eines solchen Richtungsvektors meist ohne Bedeutung.
  - Fallweise ist das aber günstig, statt des Vektors $\vec{a}$ den entsprechenden Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ zu verwenden.
  - Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen $\vec{a}$ und $\overrightarrow{a_0}$ her:

> Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so gilt für den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Beispiel:

a) Wie lauten die Koordinaten des Einheitsvektors $\overrightarrow{a_0}$ von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Lösung: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 0{,}45 \end{pmatrix}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

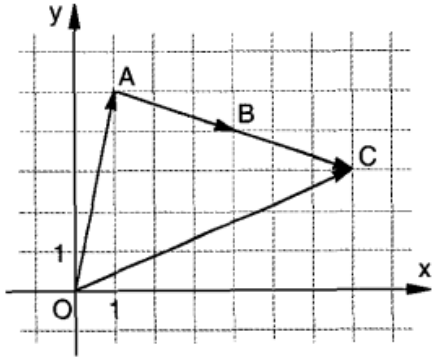
13.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so gilt für den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Beispiel:

b) Gegeben ist die Strecke AB durch $A(1|5)$ und $B(4|4)$. Verdoppeln Sie die Länge der Strecke AB über B hinaus. Wie lauten die Koordinaten des Endpunktes C?

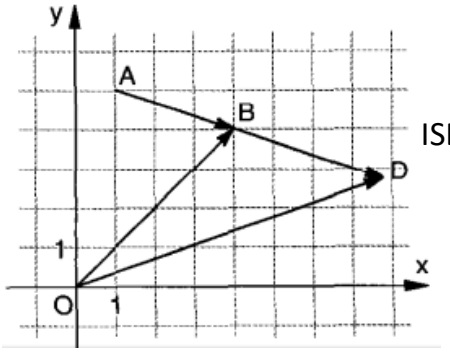


Lösung: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C(7|3)$

c) Verlängern Sie die Strecke AB über B hinaus um 4 Längeneinheiten. Wie lauten nun die Koordinaten des Endpunktes D?

Wir müssen von B aus das Vierfache des Einheitsvektors von $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ abtragen.

Der Einheitsvektor von $\overrightarrow{AB}$ ist wegen: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ der Vektor $\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.



$\overrightarrow{BD} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Damit: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7{,}8 \\ 2{,}7 \end{pmatrix}$

→ Also $D(7{,}8|2{,}7)$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

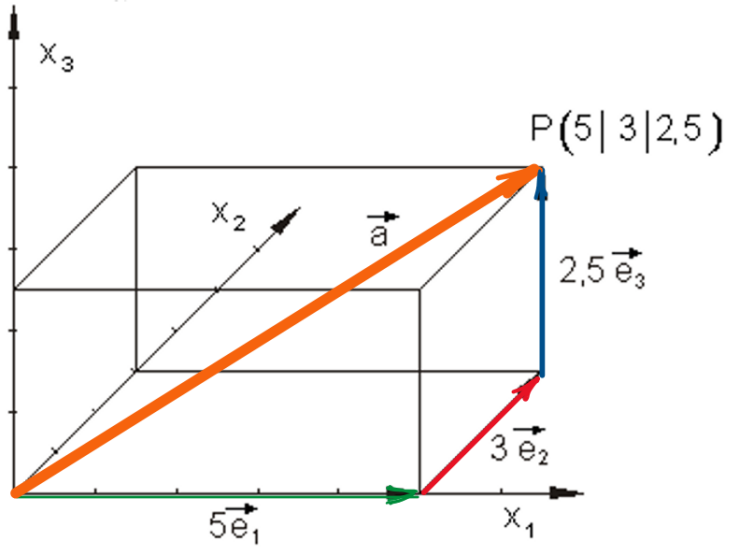
ISBN: 9783705501553

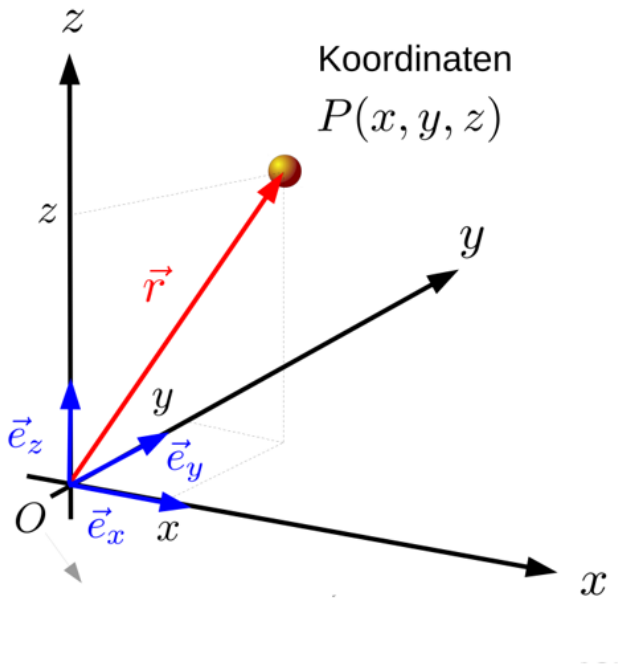
13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Vektoren im Koordinatensystem

Ortsvektor:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\ \vec{e}_x + y\ \vec{e}_y + z\ \vec{e}_z$$





Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Alle Rechengesetze für Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) gelten auch für Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$):

1. Addition:

   Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden komponentenweise addiert:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + a_3 \end{pmatrix}$$

2. Subtraktion:

   Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ werden komponentenweise subtrahiert:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Alle Rechengesetze für Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) gelten auch für Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$):

3. Multiplikation eines Vektors mir einem Skalar λ:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

4. Betrag $\|\vec{v}\|$ eines Vektors:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Alle Rechengesetze für Vektoren in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) gelten auch für Vektoren im Raum ($\mathbb{R}^3$):

5. Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \\ &= \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\alpha\end{aligned}$$

6. Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}\right)$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Rechnen mit Vektoren

Speziell im Raum ($\mathbb{R}^3$) !!!

7. Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Kreuzprodukt

- Das **Kreuzprodukt** (oder Vektorprodukt oder Äußeres Produkt) ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.
- Kreuzprodukt ≠ Skalarprodukt
- Kreuzprodukt: Vektor „mal“ Vektor = Vektor
- Skalarprodukt: Vektor „mal“ Vektor = Skalar

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt der Vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

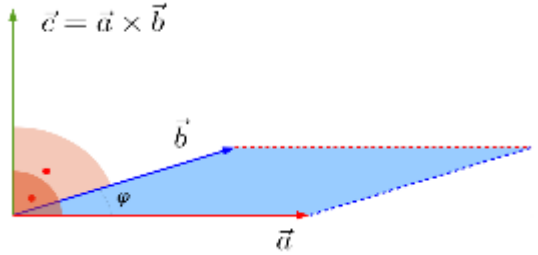
Kreuzprodukt oder **Vektorprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Kreuzprodukt

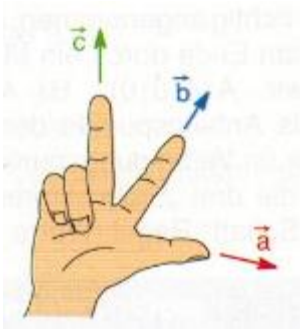
Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert einen Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften.



1. $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \text{ und } \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

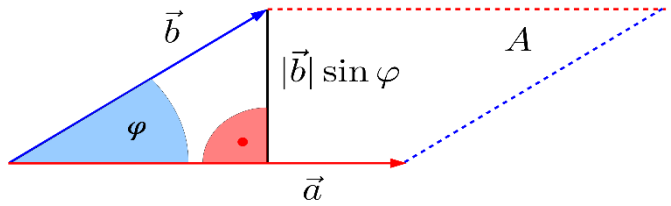
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein "rechte Hand-System"



3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, wobei φ der zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.

   Das entspricht gerade der **Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms**.

Die Länge des Vektors $\vec{c}$, $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt A des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

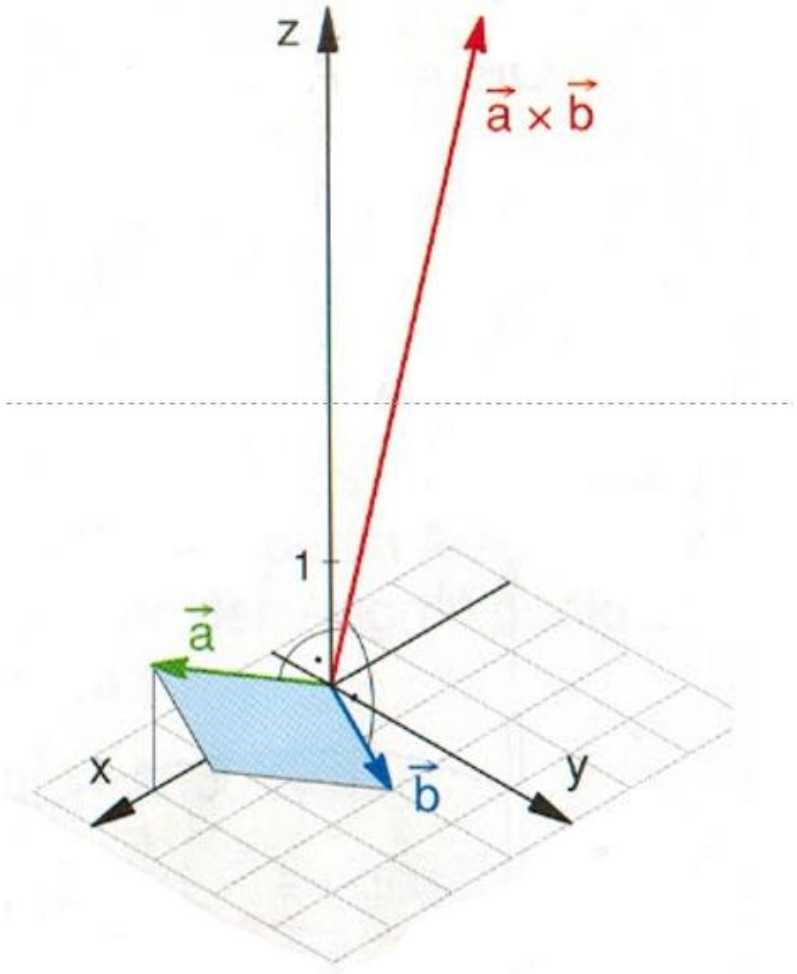
Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} \times \vec{b} = ?$$

Lösung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Spatprodukt

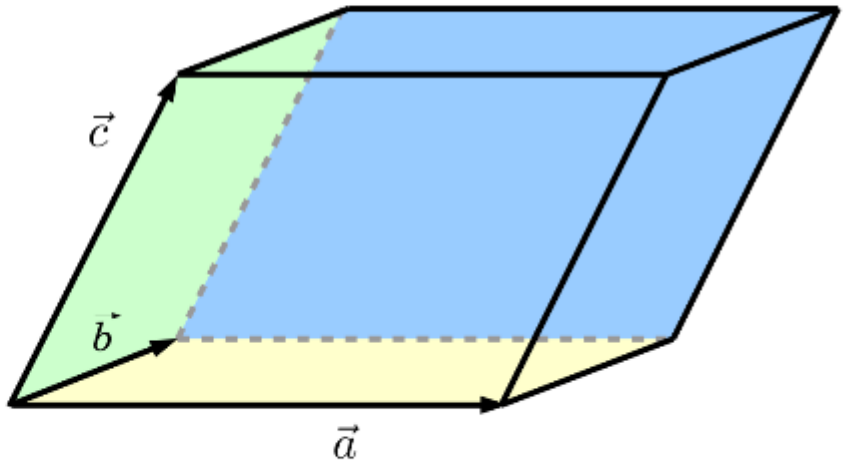
Definition: Spatprodukt

Für drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ist das **Spatprodukt** $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ definiert als

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Geometrisch:

$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ gibt das Volumen des Spats (oder Parallelepipeds) an, das von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird:



$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **koplanar** (liegen in einer gemeinsamen Ebene)

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Spatprodukt

Aufgabe: Einen Spat nennt man einen Körper, der von drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird. Das Volumen V des Spates kann durch die Formel

$$V = | < \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} > |$$

berechnet werden. Berechnen Sie das Volumen des Spates, der von den Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Lösung: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Für das Volumen folgt $V = |0 - 4 - 5| = 9$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

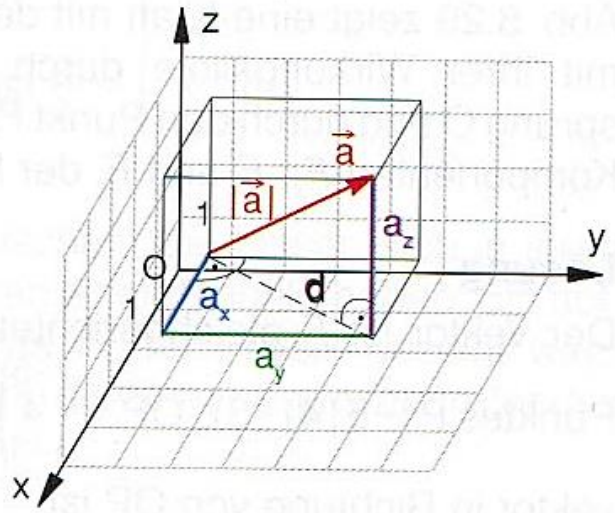
Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

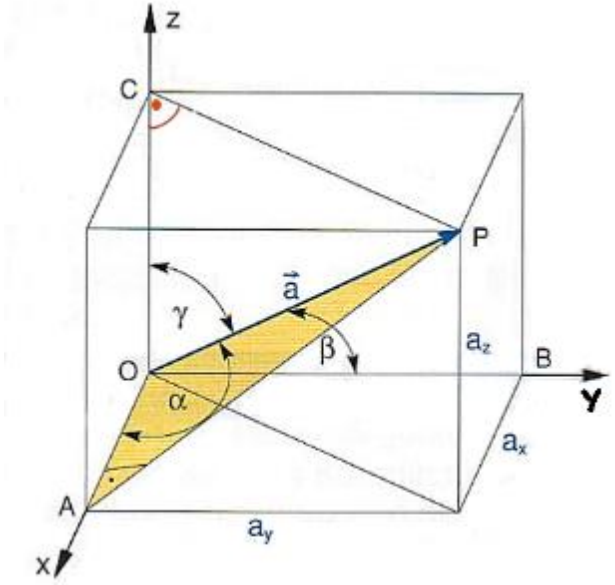
a) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und normieren Sie den Vektor, d.h. bestimmen Sie den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ in Richtung von $\vec{a}$.

b) Der Vektor $\vec{a}$ wird vom Punkt $P(3|2|1)$ abgetragen. Welche Koordinaten besitzt der Endpunkt Q?

c) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ in b)?

d) Bestimmen Sie die Winkel, welche der Vektor $\vec{a}$ in a) mit den drei positiven Koordinatenachsen einschließt.





Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

a) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und normieren sie den Vektor, d.h. bestimmen Sie den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ in Richtung von $\vec{a}$.

Lösung:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Damit ist $a = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29} = 5{,}39.$

Der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ in Richtung $\vec{a}$ errechnet sich zu $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}743 \\ 0{,}557 \end{pmatrix}$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

b) Der Vektor $\vec{a}$ wird vom Punkt $P(3|2|1)$ abgetragen. Welche Koordinaten besitzt der Endpunkt Q?

Lösung:

Wie bei zweidimensionalen Vektoren gilt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$.

c) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ in b)?

Lösung:

Der Winkel berechnet sich wie bei zweidimensionalen Vektoren mithilfe des Skalarprodukts. Die **Koordinatenform des Skalarprodukts** lautet nun:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77}$;

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{31}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} = 0{,}944 \Rightarrow \varphi = \arccos 0{,}944 = 19{,}2°$.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

13.2 Vektoren in $\mathbb{R}^3$

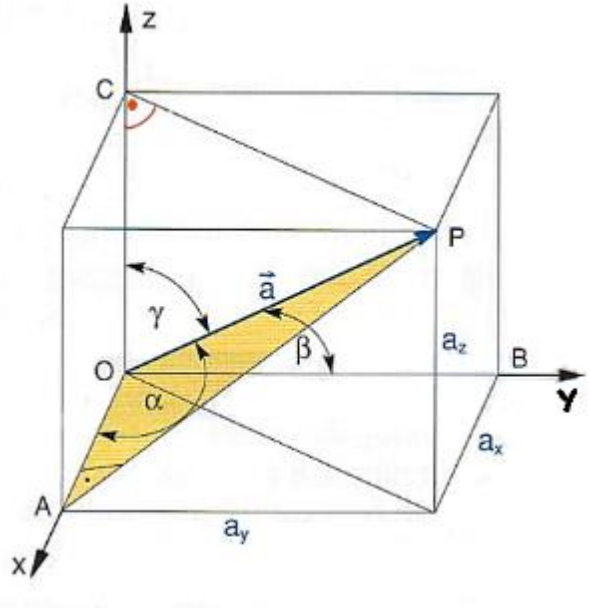
Aufgaben - Geometrische Berechnung mit Hilfe von Vektoren

d) Bestimmen Sie die Winkel, welche der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit den drei positiven Koordinatenachsen einschließt.

Lösung: aus Teil a) folgt: $|\vec{a}| = \sqrt{29}$

Bemerkung: Oft sind die drei Winkel α, β, γ eines Vektors $\vec{a}$ zu den *positiven* Koordinatenachsen gegeben, so folgt für die Koordinaten (skalaren Komponenten):

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$$
$$a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$$
$$a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14. Ableitung – Grundbegriffe

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Grundbegriffe

- Wir betrachten nur reellwertige Funktionen
- Wichtige Eigenschaften einer Kurve:
  - Stetigkeit: Kann eine Funktion in einem Zuge gezeichnet werden?
  - Differenzierbarkeit - Glattheit und Steigungsverhalten einer Funktion

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Stetigkeit

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

- **Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt c:**

  Eine **Funktion f** heißt **stetig in einem Punkt c,** wenn

  - f in c **definiert** ist und
  - der Grenzwert $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ **existiert** und
  - stimmt mit dem Funktionswert überein: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

- **Einseitige Stetigkeit:**

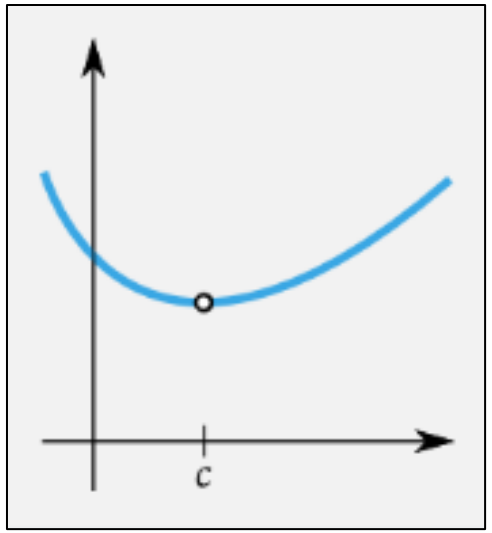
  linksseitig stetige Funktion in c, wenn gilt: $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = f(c)$

  rechtsseitig stetige Funktion in c, wenn gilt: $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = f(c)$

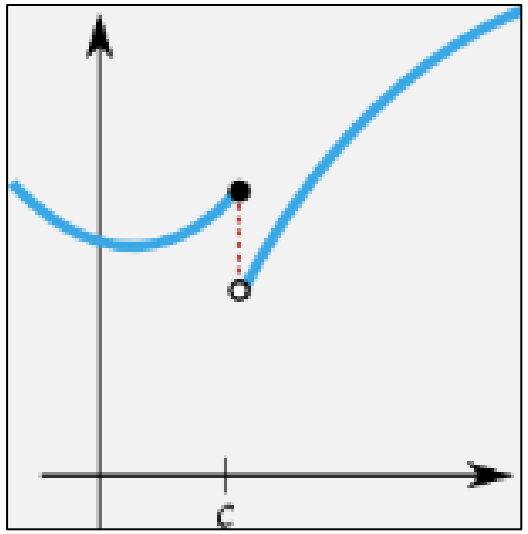
- **Stetigkeit in einem Intervall:**

  Eine Funktion f heißt **stetig** in einem **offenen Intervall** (a, b), wenn sie **für alle Punkte** $x \in (a, b)$ stetig ist.
  An den **Rändern** des Intervalls kann man lediglich **einseitige Stetigkeit** untersuchen.

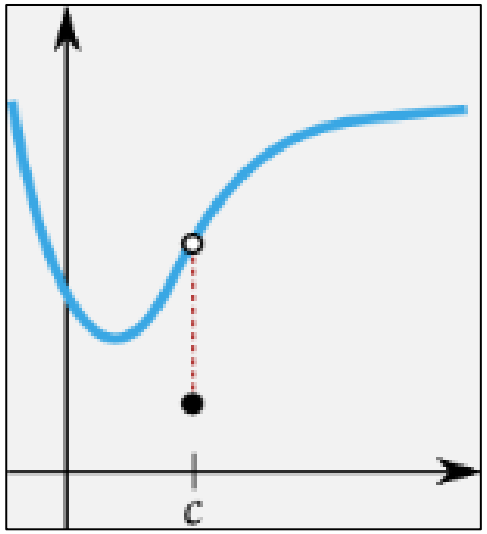
14.1 Grundvorstellung
Stetigkeit



$f(x)$ ist an der Stelle c nicht definiert → **nicht stetig**



An der Stelle c existiert nur **linksseitiger Grenzwert** → $f(x)$ ist **linksseitig stetig**



Der Grenzwert stimmt nicht mit dem Funktionswert überein $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ → **nicht stetig**

https://matheguru.com/allgemein/stetigkeit-von-funktionen.html

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Momentane Geschwindigkeit

Ein Auto fährt an einem bestimmten Zeitpunkt los und fährt geradeaus.

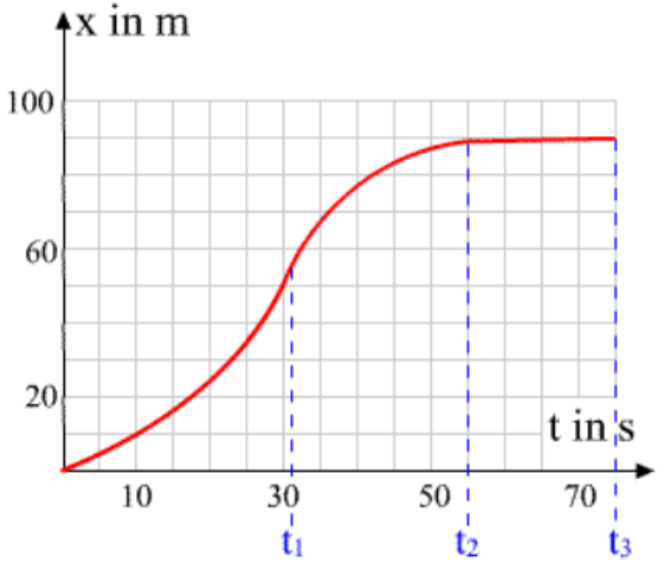
- zum Zeitpunkt t_0: zurückgelegter Weg y_0 Meter;
- zum Zeitpunkt t: zurückgelegter Weg (vom Punkt y_0 aus) y Meter.

$y = f(t)$ ist eine *Weg-Zeit-Funktion*.

Zeit von t_0 bis t: $\Delta t = t - t_0$

In der Zeit $\Delta t = t - t_0$ zurückgelegte Strecke: $\Delta y = f(t) - f(t_0)$

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit $v_{t_0,t}$**: „Weg durch Zeit“



Differenzen-quotient

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Je dichter t an t_0 heranrückt, desto näher kommt der Wert $v_{t_0,t}$ der **Momentangeschwindigkeit v_{t_0}**, also der Geschwindigkeit auf dem Tacho (Grenzwertübergang):

Differential-quotient

$$v_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Dies ist die **Ableitung von der Funktion $f(t)$ an der Stelle t_0**:

$$f'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

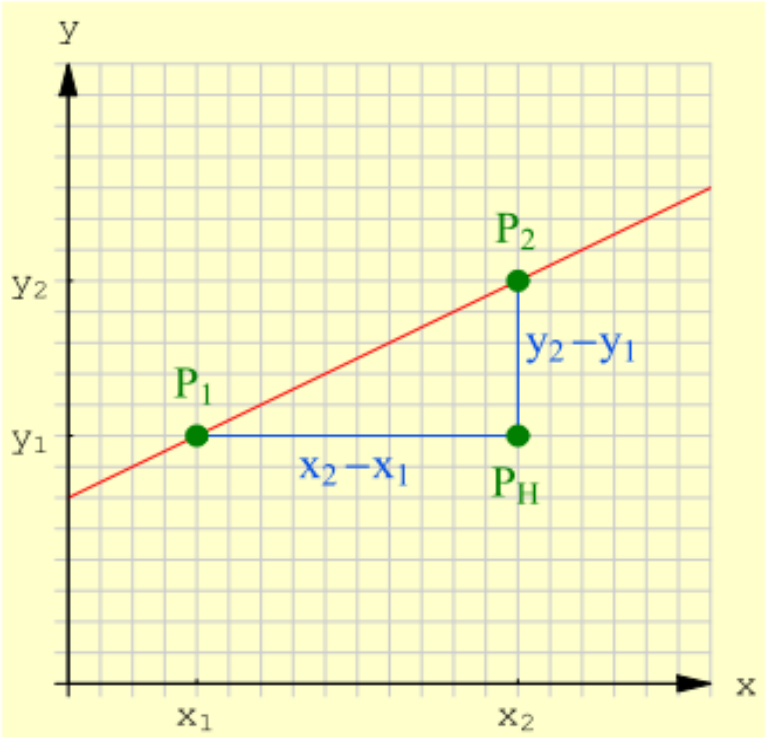
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Tangentenproblem

Steigung einer Geraden?

→ Steigungsdreieck

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta x}$$



Steigung einer Kurve? …

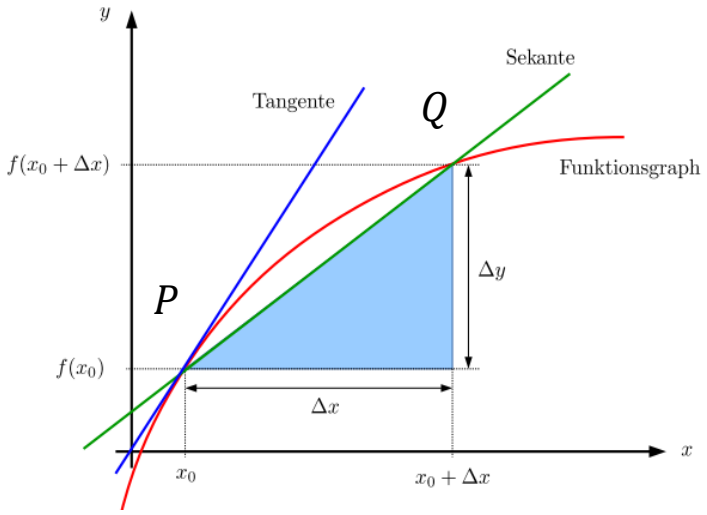
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Tangentenproblem

Steigung einer Kurve? …

Steigung der Sekante PQ = m_s mittlere Steigung des Kurvenstückes PQ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Steigung der Tangente?

Wir halten den Punkt Q fest und lassen Q immer näher an P heranrücken, so dreht sich die Sekante PQ um P und nähert sich einer Grenzgeraden t, der **Tangente** an f in x_0

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x - x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Für $\Delta x \to 0$ geht der Differenzenquotient in den **Differentialquotienten** $\frac{dy}{dx}$ über:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{\text{Grenzwertbildung}}{\rightarrow} \frac{dy}{dx}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Differenzierbarkeit

„f strich von x“

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dieser Grenzwert $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0.

Die Funktion f heißt **differenzierbar** auf (a, b), falls sie in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist.

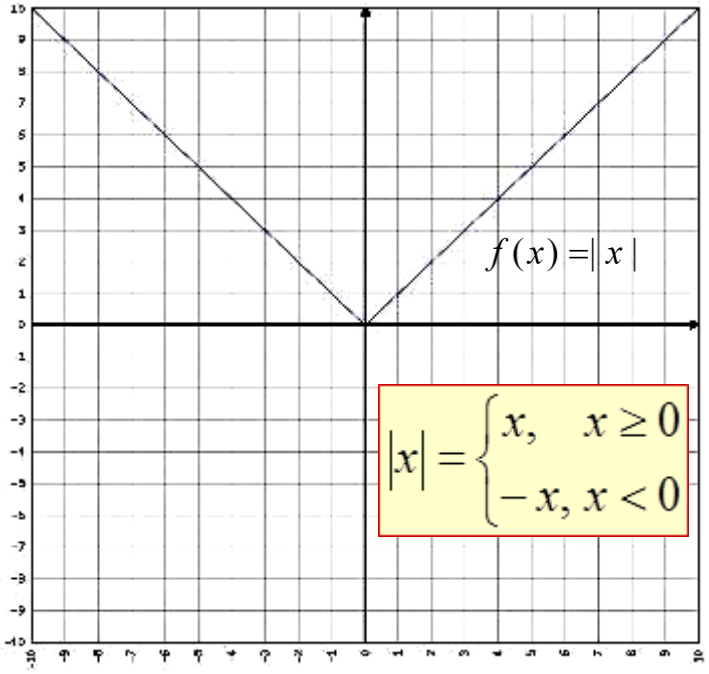
Die **Ableitung** im Punkt x_0 entspricht also gerade der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

$\rightarrow$ Ableiten heißt Linearisieren!

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Differenzierbarkeit

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = |x|$



Wie verlaufen die Tangenten an der Stelle x = 0?

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}; \qquad x_0 = 0$$

$$\Rightarrow m_s = \frac{|x|}{x}$$

$$\Rightarrow 1.)\ x > 0: \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow 2.)\ x < 0: \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$\Rightarrow$Es existiert kein Grenzwert an der Stelle x=0

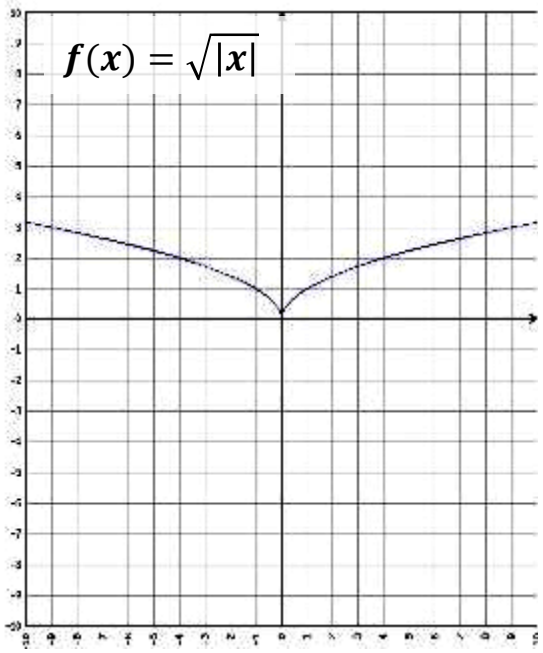
$\Rightarrow$ Es existiert keine Tangente an der Stelle x=0

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar

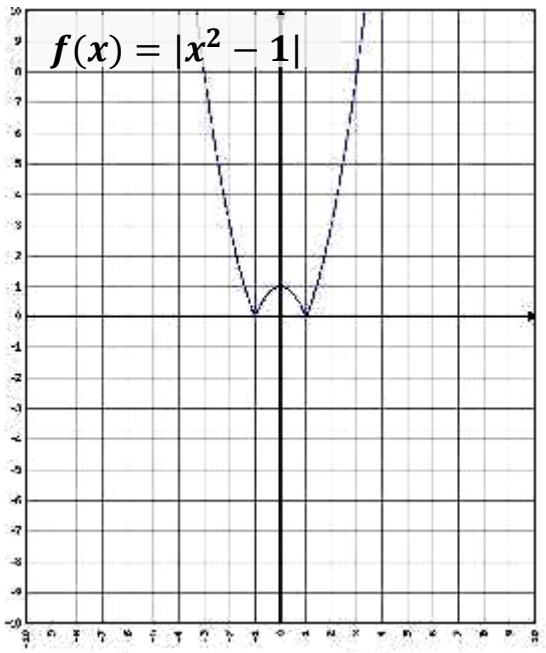
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Differenzierbarkeit

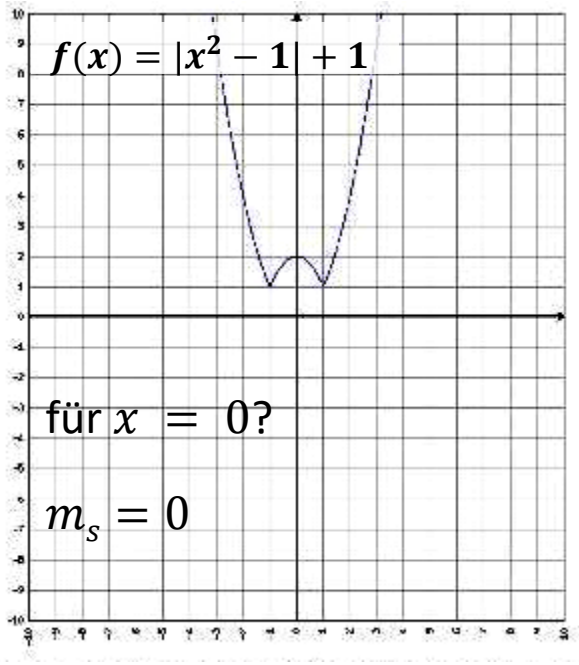
An welchen Stellen ist der Graph der Funktion ist nicht differenzierbar?



für $x = 0$



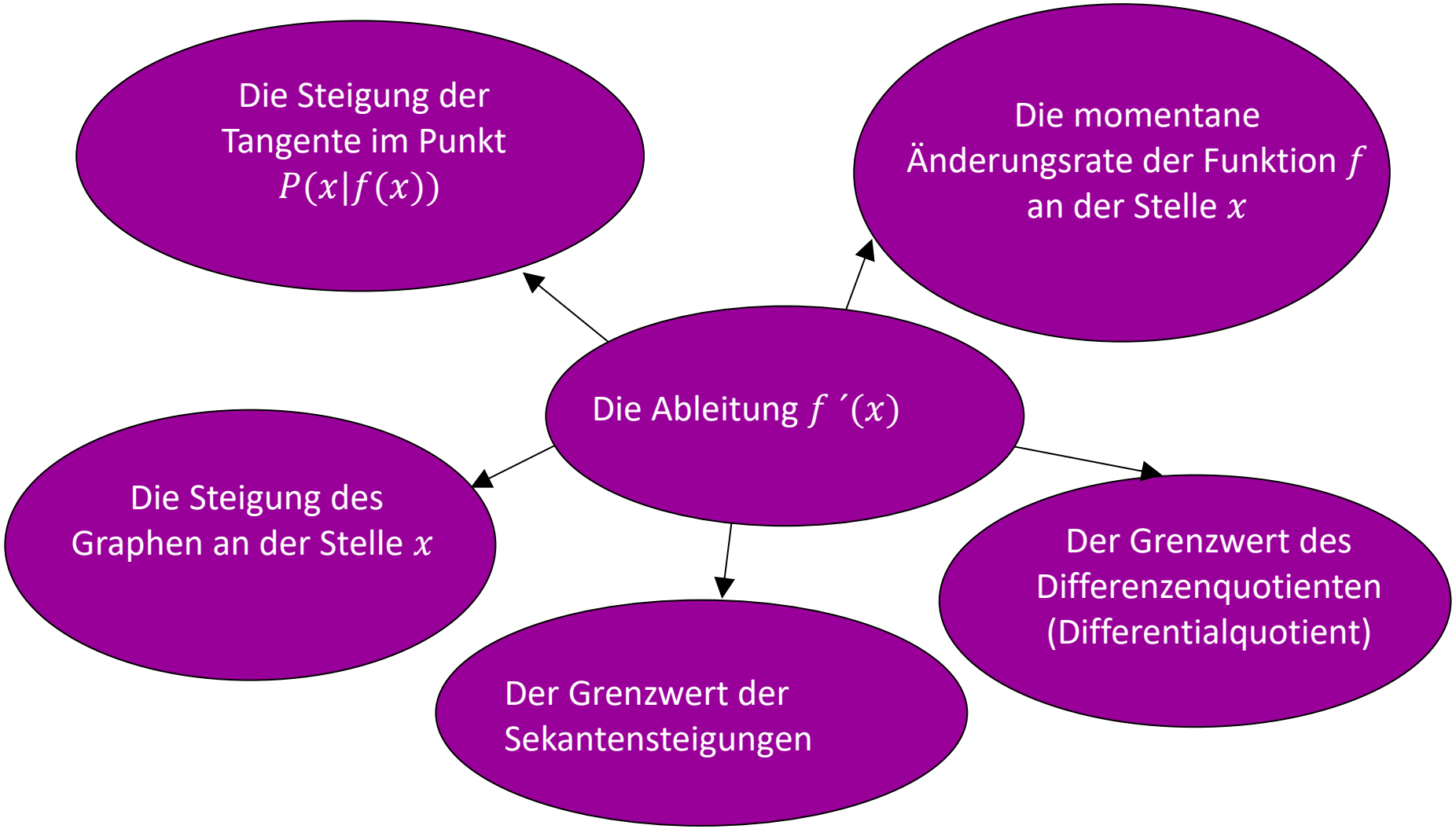
für $x = 1$
und $x = -1$



für $x = 1$
und $x = -1$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Ableitung



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

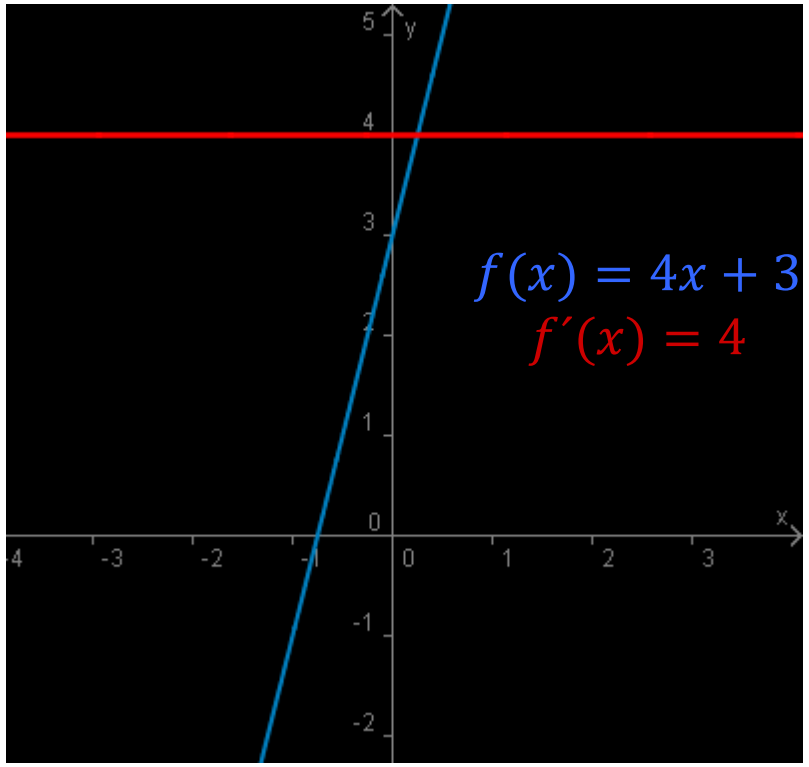
14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungsfunktion

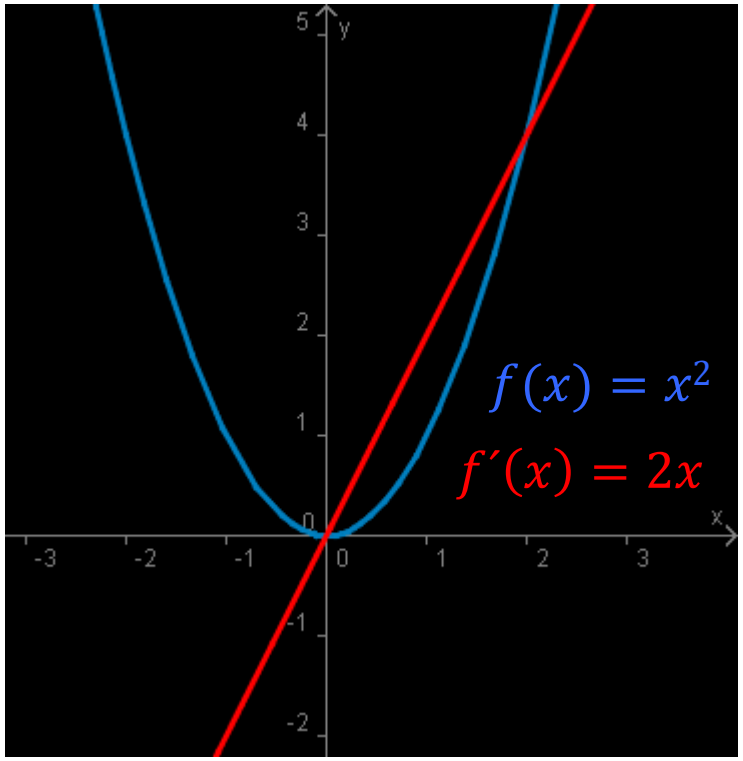
- Ableitung f' ist eine Funktion!
  - Sie ordnet jedem x genau ein y (Ableitung)
  - Wir sprechen von einer Ableitungsfunktion
  - Von der Funktion f' kann man erneut die Ableitung bilden
    (f''- **zweite** Ableitung von f, f'''- **dritte** Ableitung, ... f^n – **n-te** Ableitung)
- Zusammenstellung wichtiger Grundfunktionen f und ihrer Ableitungen f':

$f(x)$	$mx+b$	x^2	x^3	x^4	c	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	m	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	0	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen





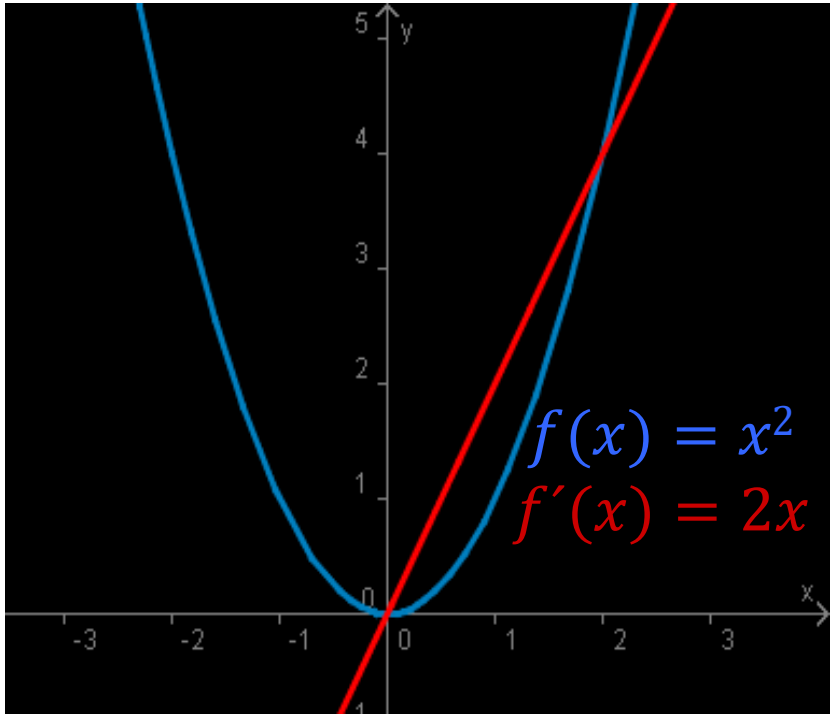
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

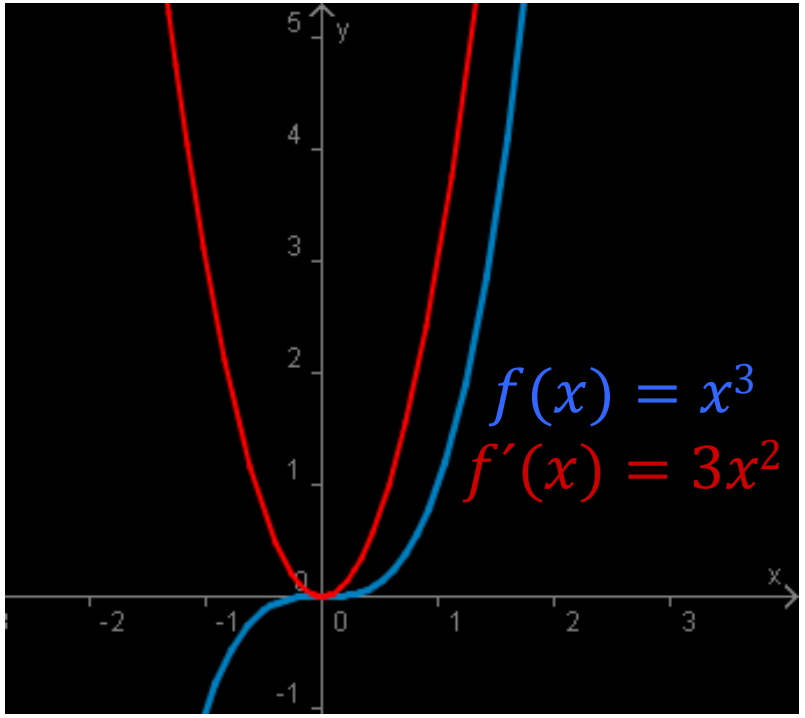
ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

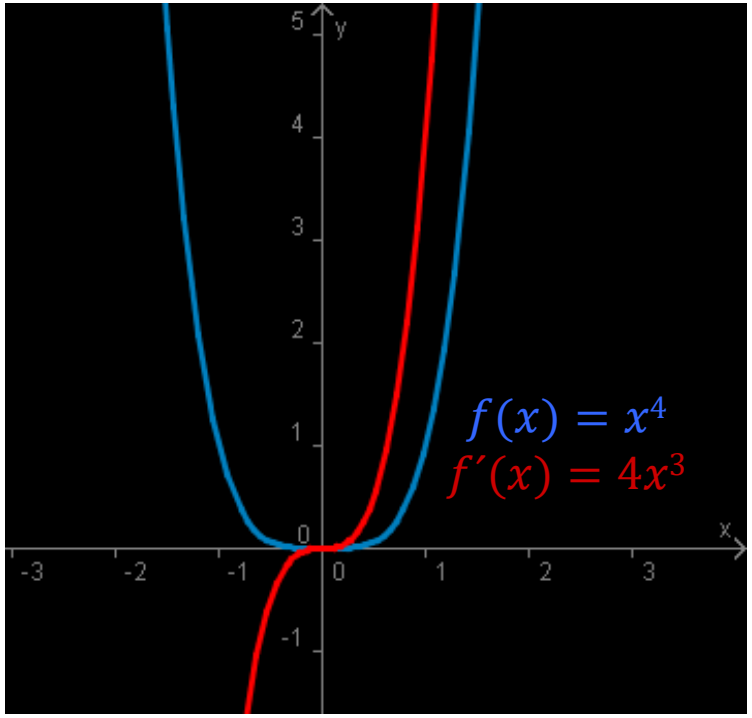


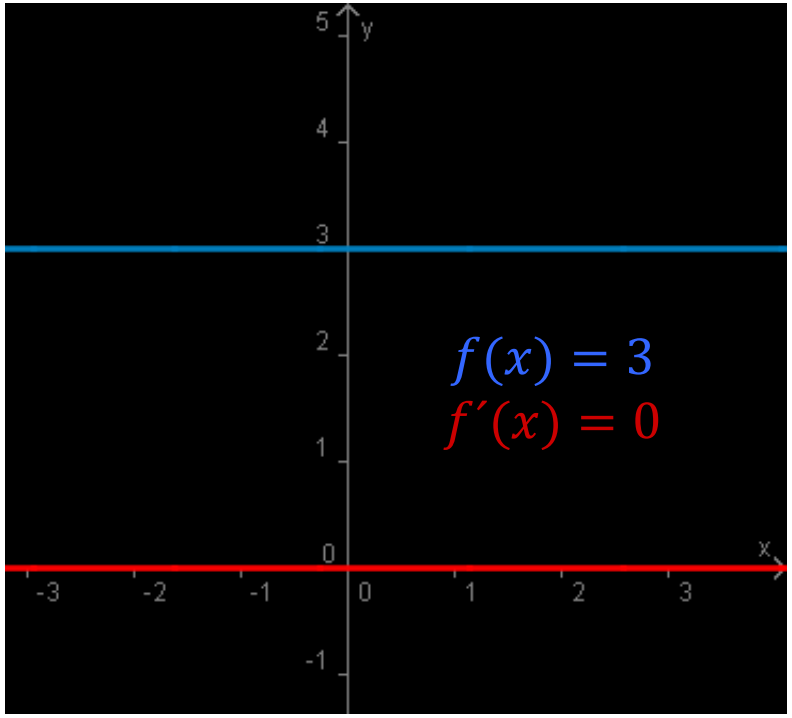


Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen





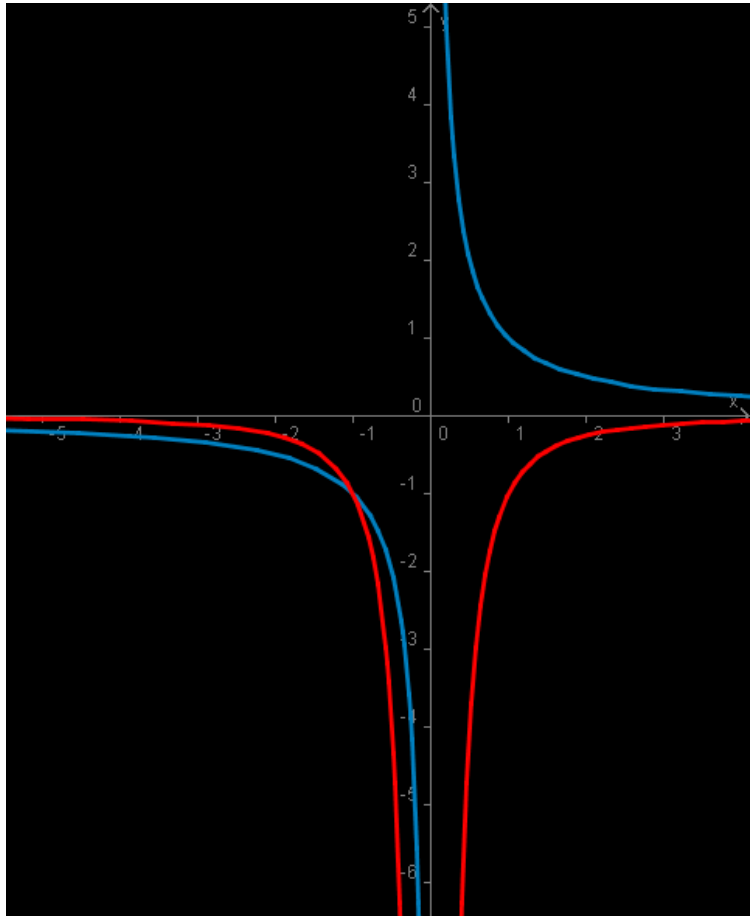
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos$ und $\tan$ sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar und es gilt:

$$f(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

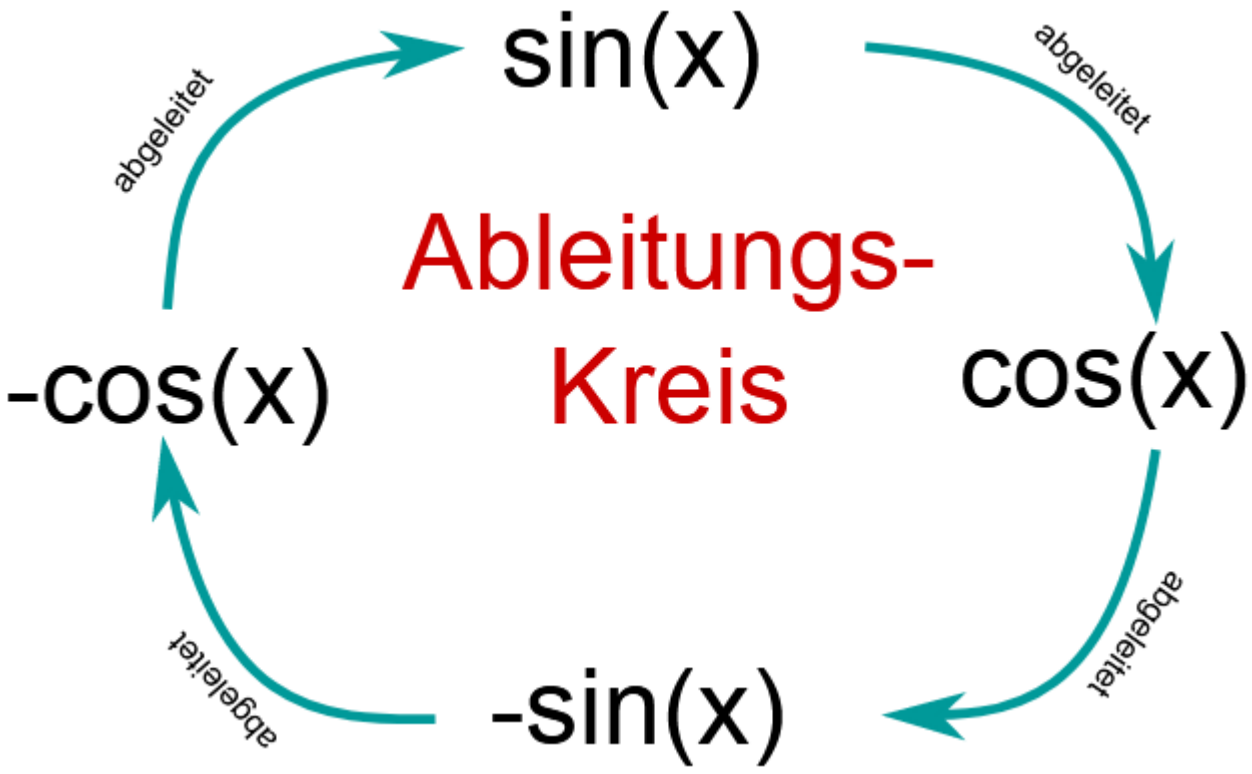
→ Ableitungskreis

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Ableitungskreis:



14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Ableitung der e-Funktion und der Logarithmusfunktion

$$f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Ableitung beliebiger Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = \log_a x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkungen
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
speziell :		
1	0	$1 = x^0$
x	1	$x = x^1$
x^2	$2x$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a},\ a \in \mathbb{R}^{>0}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},\ x, a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Im Kopf behalten!!!

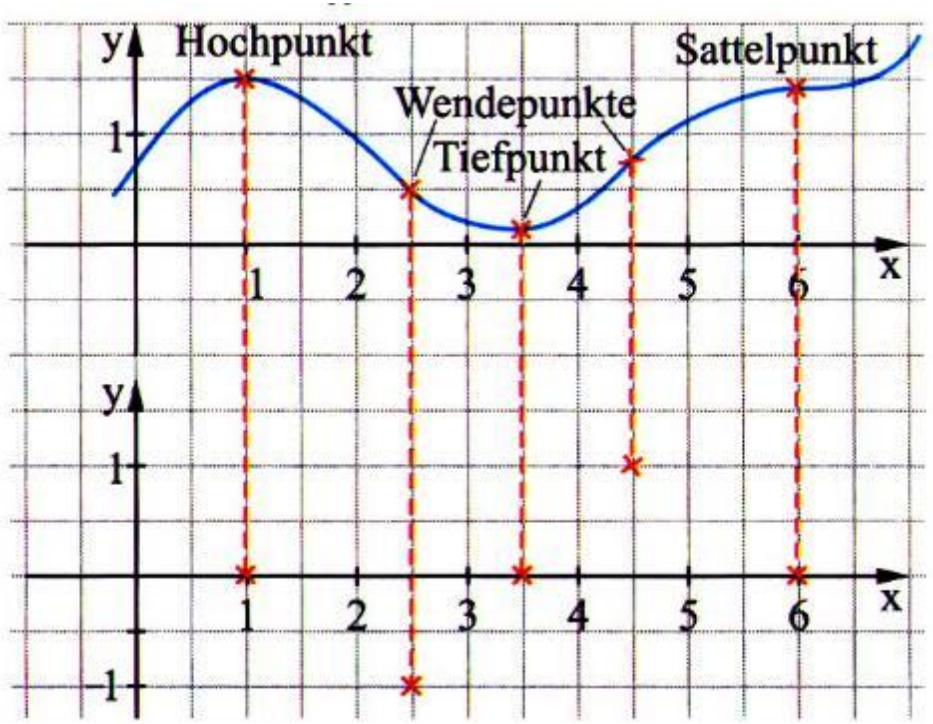
$$\arctan(x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungskurve – zeichnerisches Ableiten

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Schaubild der Ableitungsfunktion durch zeichnerisches Differenzieren bestimmen



- Bestimmen der Tangentensteigungen in den markanten Punkten des Graphen.
- Eintragen der Werte in das darunter gezeichnete Koordinatensystem als Ordinaten.
- Verbinden der erhaltenen Punkte durch eine Kurve

14.3 Ableitungsregeln
Überblick

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Mit den folgenden Regeln kann man die Ableitung zusammengesetzter Funktionen auf Ableitungen einfacherer Funktionen zurückführen.

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ (im Definitionsbereich) differenzierbare Funktionen, und n und a reelle Zahlen. Dann gilt:

Konstante Funktion	$f(x) = a, \quad f'(x) = 0$
Faktorregel	$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ für $g(x) \neq 0$
Potenzregel	$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$

14.3 Ableitungsregeln
Faktorregel

$f(x) = 1 \cdot x \rightarrow f'(x) = 1$
$f(x) = 2 \cdot x \rightarrow f'(x) = 2$
$f(x) = 3 \cdot x \rightarrow f'(x) = 3$

$$f(x) = k \cdot x \rightarrow f'(x) = k$$

$f(x) = 1 \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = 1 \cdot 2x$
$f(x) = 2 \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 2x = 4x$
$f(x) = 3 \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

$$f(x) = k \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = k \cdot 2x$$

Allgemein gilt:

$$f(x) = k \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$$

Der **Faktor** vor einer Funktion $g(x)$ bleibt folglich beim Ableiten **erhalten** und wird einfach **vor die Ableitung** der Ableitungsfunktion gesetzt.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Summenregel

Bei Summen und Differenzen werden alle Terme einzeln abgeleitet.

Beispiel:

$$f(x) = x^2 + x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x + 1$$

Allgemein gilt:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

„Ableiten mal Abschreiben plus Abschreiben mal Ableiten“

$$\begin{aligned}(x \cdot \ln x)' &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\ &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1,\end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Speziell: $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1' \cdot g - 1 \cdot g'}{g^2} = \frac{-g'}{g^2}$

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln

Ableitungsregeln für Potenzfunktionen

$$f(x) = x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot x^0$$
$$f(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot x^1$$
$$f(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^2$$
$$f(x) = x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot x^3$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Bemerkung: Die Formel gilt auch für **beliebige (negative und Brüche) Exponenten!**

Mit dieser Regel können wir nun Potenzfunktionen und Wurzeln ableiten:

$$(x^3 + 2x^2 - x + 1)' = 3x^2 + 4x - 1$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Kettenregel

Das Einsetzen einer Funktion f in eine Funktion g heißt Verkettung:

$$g \circ f(x) \;=\; g(f(x)).$$

Beispiel

Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$. Dann ist:

$$g \circ f(x) \;=\; g(f(x)) \;=\; \sin\left(x^2\right)$$

und

$$f \circ g(x) \;=\; f(g(x)) \;=\; f(\sin x) \;=\; (\sin x)^2 \;=\; \sin^2 x.$$

Bemerkung:

Im Allgemeinen ist $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Kettenregel

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x).}_{\text{innere Ableitung}}$$

1. Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$. Damit ist:

$$\begin{aligned}(\sin(x^2))' &= (g \circ f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x.\end{aligned}$$

1. Sortiere die Funktion von innen nach außen!
2. Leite von außen nach innen ab!

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Kettenregel

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x).}_{\text{innere Ableitung}}$$

2. Sei $f(x) = c \cdot x$ und $g(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $f'(x) = c$, $g'(x) = \mathrm{e}^x$ und daher

$$(e^{cx})' = (g \circ f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot c = c \cdot \mathrm{e}^{cx}.$$

$$\left(e^{2x}\right)' =$$

$$(e^{4x})' =$$

$$(e^{-4x})' =$$

$$(e^{-x}) =$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Kombinationen der Ableitungsregeln

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Bei der Ableitung werden alle Ableitungsregeln kombiniert.

Beispiele:

1) $f(x) = 4 \cdot x^3 - 10 \cdot x$

$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 10 = 12x^2 - 10$

2) $f(x) = (-1) \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$

$f'(x) = (-1) \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x^1 = -3x^2 + 6x$

14.3 Ableitungsregeln
Kombinationen der Ableitungsregeln

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Bei der Ableitung werden alle Ableitungsregeln kombiniert.

Bemerkung: Manchmal gibt es mehrere Möglichkeiten die Ableitung zu berechnen.

Betrachte $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$:

Mit der Kettenregel ergibt sich: $f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x.$

Mit der Produktregel ist

$$\begin{aligned}(f(x))' &= (\sin x \cdot \sin x)' \\ &= \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x.\end{aligned}$$

14.3 Ableitungsregeln

Wichtige Ableitungen noch mal für Übung

$f(x)$	$f'(x)$	Beschreibung
c	0	Ableitung von Konstanten ist 0
x^n	nx^{n-1}	z.B. $(x^5)' = 5x^4$
e^x	e^x	die einzige Funktion, für die das gilt
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	sin(x) und cos(x) "drehen sich im Kreis"
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Ableitungsregeln
Ableitungsregeln - Aufgaben

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

$$(\sin(x)e^x)' = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x$$

$$(tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

$$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$(e^{sin^5(x)})' = \quad e^{sin^5(x)} 5sin^4(x)\cos(x)$$

Von innen nach außen zuordnen, von außen nach innen ableiten!

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

14.3 Ableitungsregeln
Mehrfache Ableitungen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Man kann Funktionen auch mehrmals ableiten.

$$f'' = (f')' \quad \text{und} \quad f''' = (f'')'.$$

Zu $f(x) = x^4$ ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3, \\ f''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2 \quad \text{und} \\ f'''(x) &= 12 \cdot 2x = 24x. \end{aligned}$$

Andere Schreibweisen für die zweite Ableitung f'':

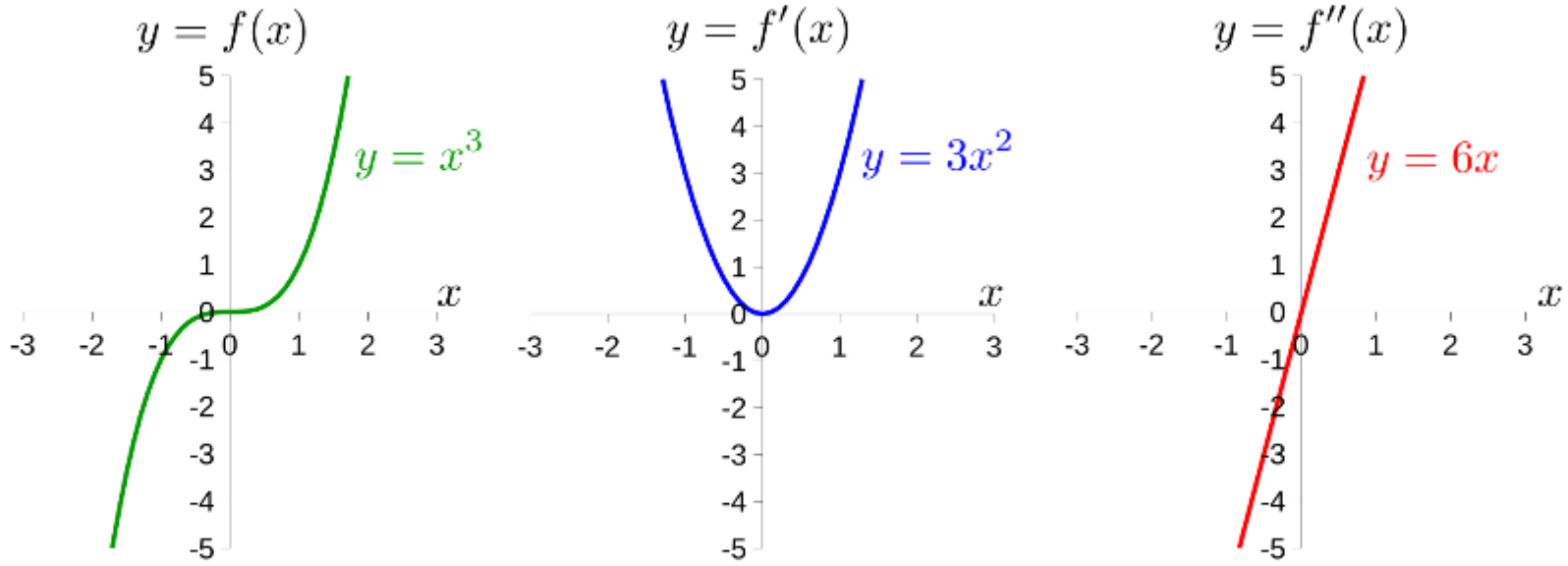
$$\frac{d^2}{dx^2} f, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \ddot{f}$$

14.3 Ableitungsregeln
Mehrfache Ableitungen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiel: $f(x) = x^3$



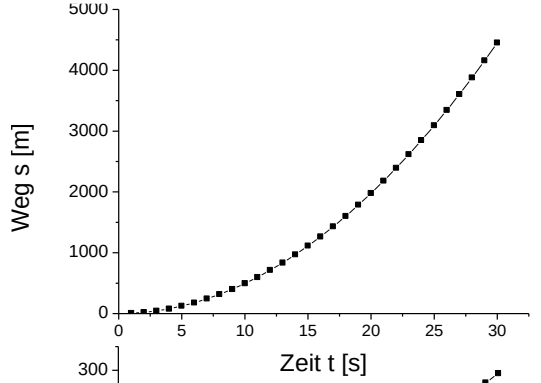
14.4 Anwendungen
Bewegung bei konstanter Beschleunigung

Weg als Funktion der Zeit

$s(t)$

Weg wächst mit zweiter Potenz der Zeit

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad [\mathrm{m}]$$

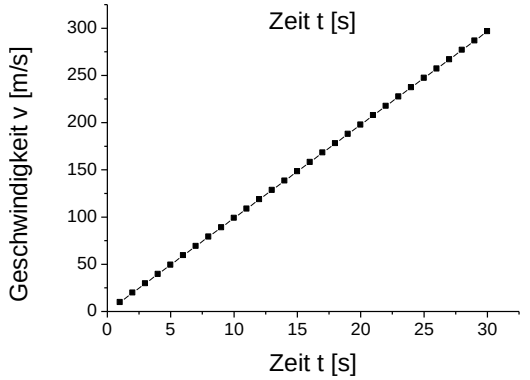


Geschwindigkeit ist Ableitung des Wegs nach der Zeit

$v(t) = \dot{s}(t)$

Geschwindigkeit wächst proportional zur Zeit

$$v(t) = a \cdot t \quad [\mathrm{m/s}]$$



Beschleunigung ist Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit

$a(t) = \dot{v}(t)$

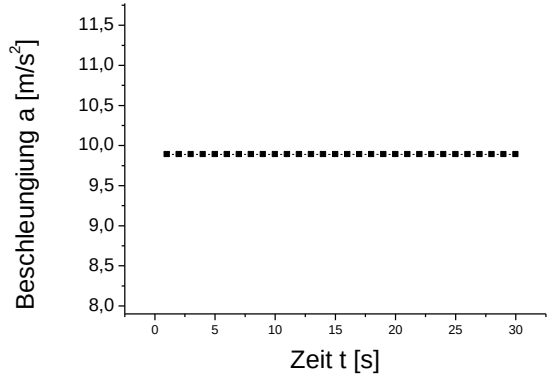
Im Intervall t **konstante Beschleunigung**

Die Beschleunigung ist ein Quotient. Zähler: Änderung der Geschwindigkeit, Nenner: Zeit während der Änderung

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit

$a \quad [\mathrm{m/s^2}]$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

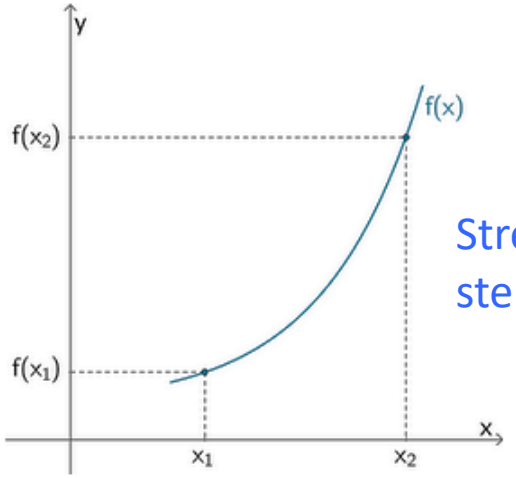
14.4 Anwendungen
Steigen und Fallen von Funktion

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

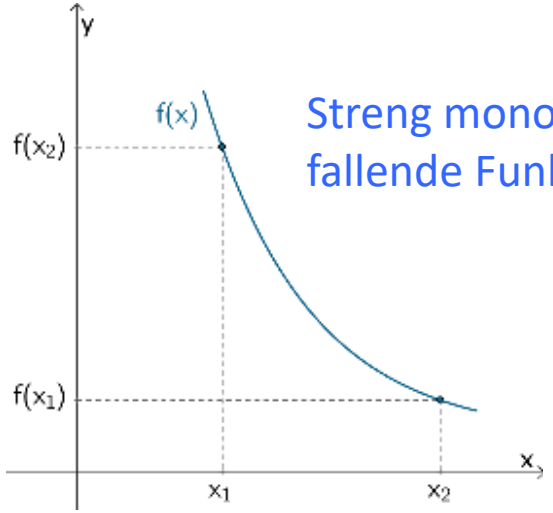
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Seien $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

monoton steigend	wenn	$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	wenn	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend	wenn	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	wenn	$f(x_1) > f(x_2)$



Streng monoton steigende Funktion



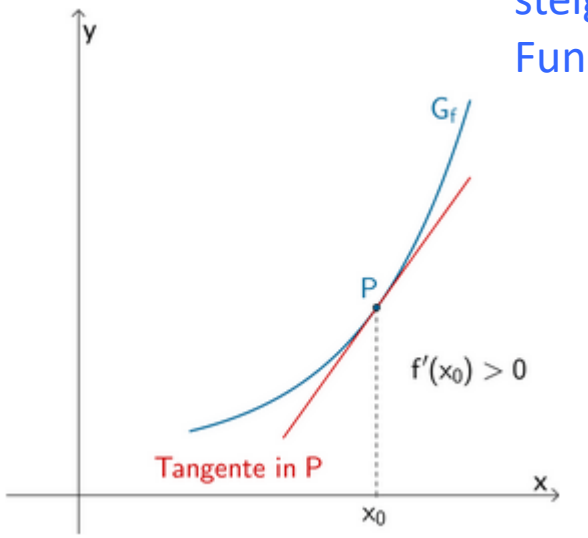
Streng monoton fallende Funktion

14.4 Anwendungen
Steigen und Fallen von Funktion

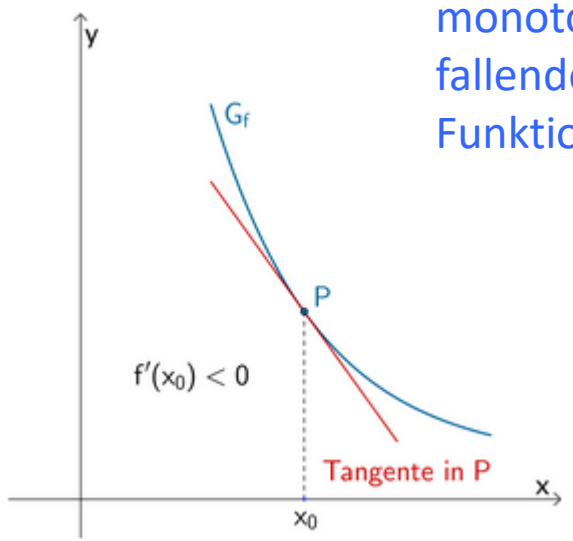
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

- Mittels der **Ableitung** bestimmen wir die **Steigung einer Tangente** an eine Funktion.
- Das **Vorzeichen** der **Tangentensteigung** zeigt, ob die Funktion **fällt**, **steigt** oder auf gleichem Niveau bleibt.

Streng monoton steigende Funktion



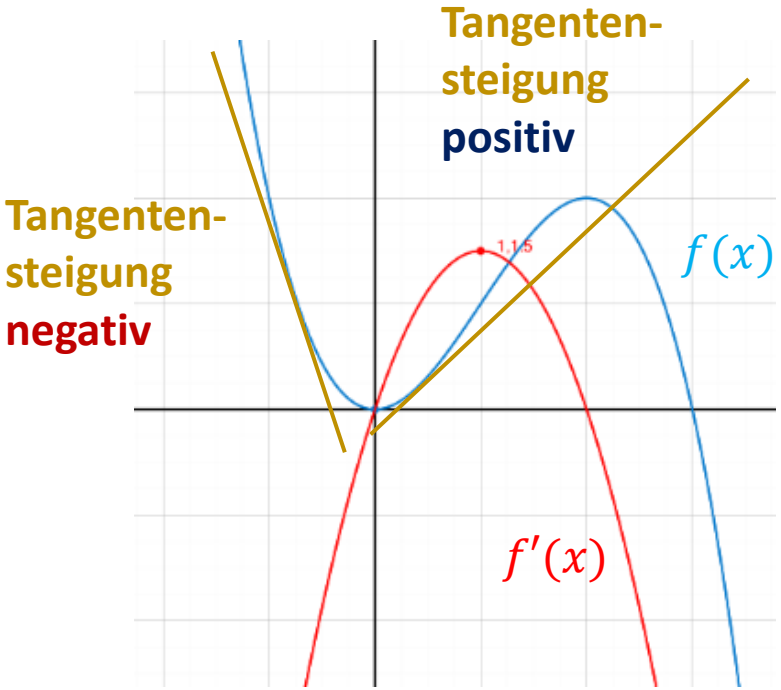
Streng monoton fallende Funktion



14.4 Anwendungen
Steigen und Fallen von Funktion

Tangentensteigung negativ
→ Ableitungsfunktion **negativ**

Tangentensteigung positiv
→ Ableitungsfunktion **positiv**



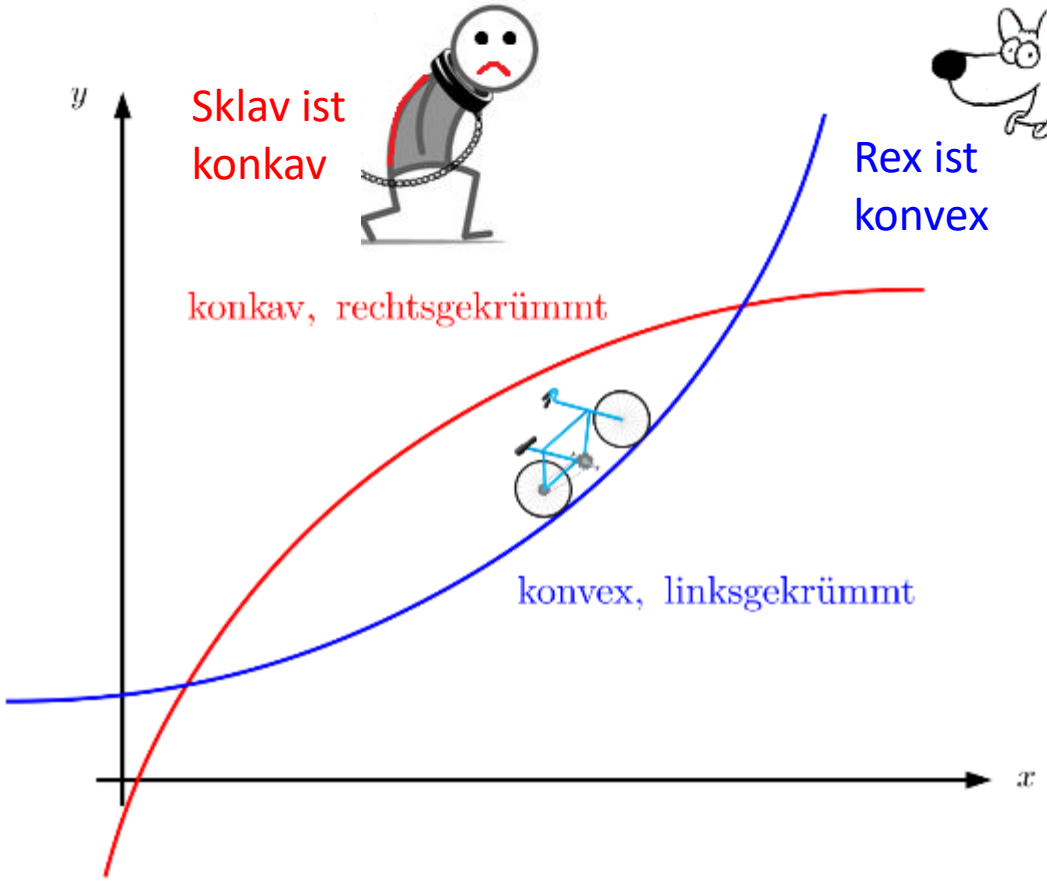
Für die Ableitungen gilt

$$f'(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ streng monoton wachsend in einer Umgebung von } a$$
$$f'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ weder steigend noch fallend in } a$$
$$f'(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ streng monoton fallend in einer Umgebung von } a$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

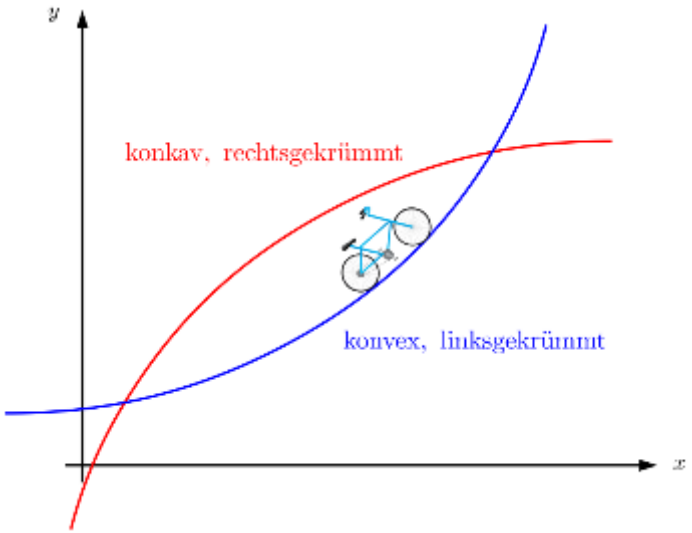
14.4 Anwendungen
Konkav und Konvex

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern



Rechts bzw. links bezieht sich darauf, in welche **Richtung** man **lenken** müsste, wenn man in Richtung der x-Achse auf der Kurve entlangführe.

14.4 Anwendungen
Konkav und Konvex



Definition: Konkav und Konvex

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- f heißt **konkav (rechtsgekrümmt)** auf (a, b) genau dann, wenn f' auf (a, b) monoton fallend ist.

→ Zweite Ableitung ist negativ

- f heißt **konvex (linksgekrümmt)** auf (a, b) genau dann, wenn f' auf (a, b) monoton steigend ist.

→ Zweite Ableitung ist positiv

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen
Konkav und Konvex

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Krümmung und zweite Ableitung

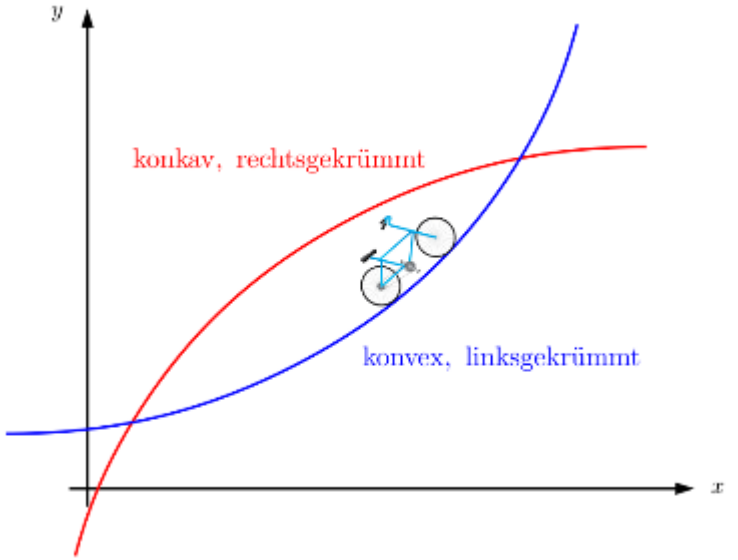
Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann gilt für alle $x \in (a, b)$:

(i) f ist konkav auf $(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \leq 0$ ☹

(ii) f ist konvex auf $(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \geq 0$ ☺

Beispiele

1. Die Funktion f mit $f(x) = -x^2$ ist konkav.
2. Die Funktion g mit $g(x) = x^2$ ist konvex.



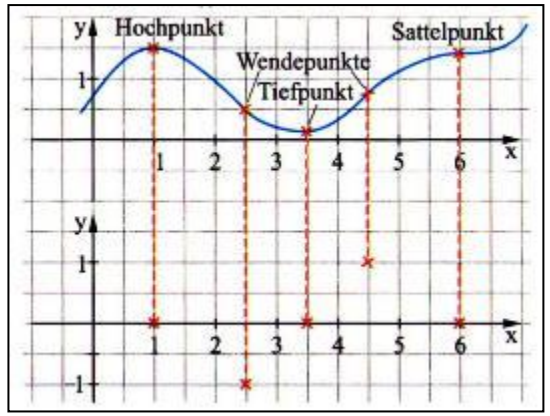
14.4 Anwendungen
Extremwerte einer Funktion

Definition (Minimum und Maximum einer Funktion) *Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich D. Dann heißt x_{max} Maximum von f, wenn*

$$\forall_{x \in D} \; f(x) \leq f(x_{max})$$

Enstprechend definiert man das Minimum x_{min} durch

$$\forall_{x \in D} \; f(x) \geq f(x_{min})$$



Globale Extremstellen

Lokale Extremstellen → In einem Streifen

Extremstellen → waagerechte Tangente!

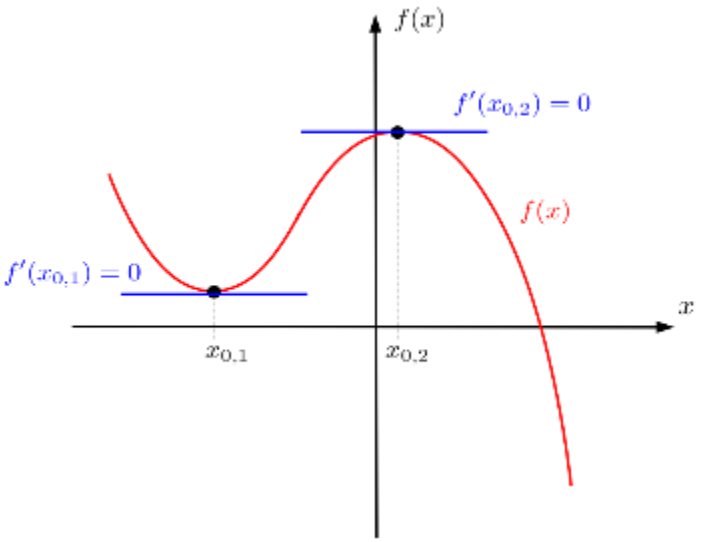
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Lokales oder Relatives Extremum

Hat eine Funktion an einer Stelle x_0 ein **lokales Maximum** oder ein **lokales Minimum**, so ist an dieser Stelle die Steigung der Funktion und die erste Ableitung gleich Null

$$f'(x_0) = 0$$



Achtung! Die Umkehrung gilt nicht: Wenn $f(x_0) = 0$ ist, muss die Funktion an der Stelle $_0$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzen.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

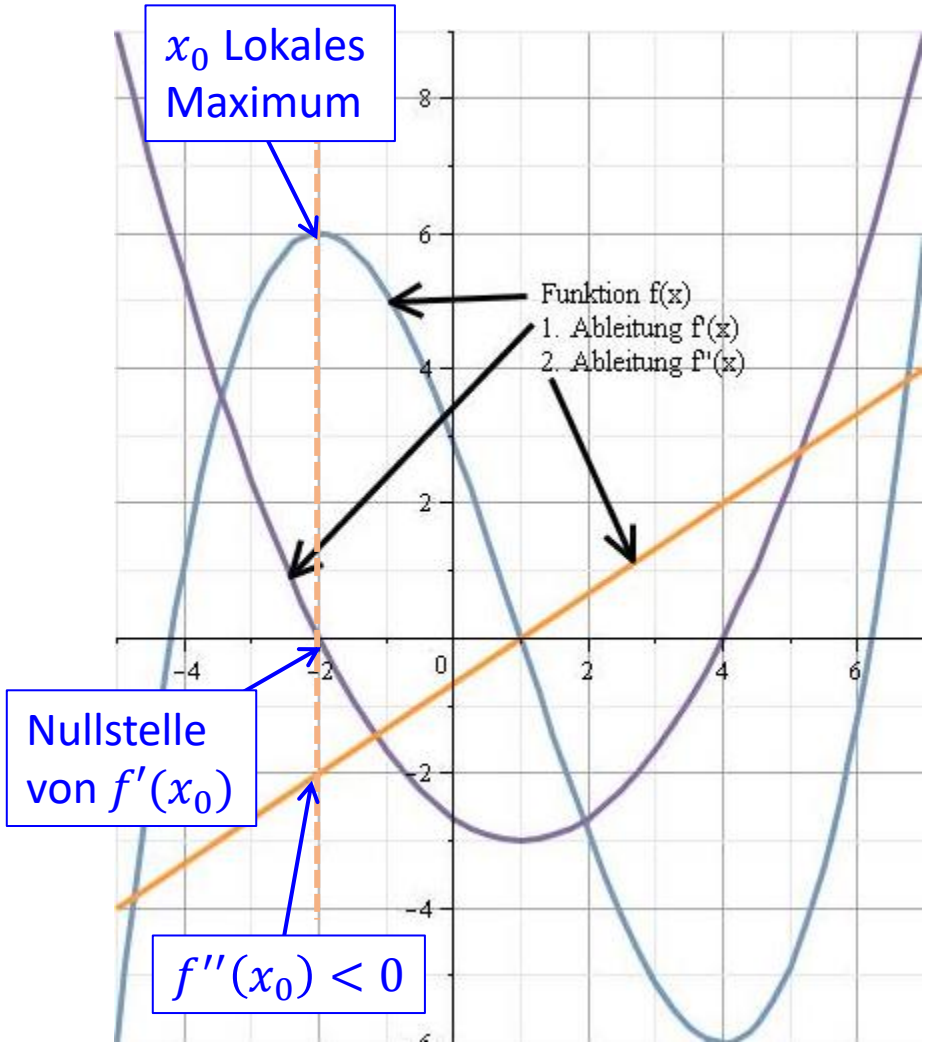
ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Erste hinreichende Bedingung für Extremwerte



Ist eine Funktion f in x_0 zweimal differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$, ist weiter:

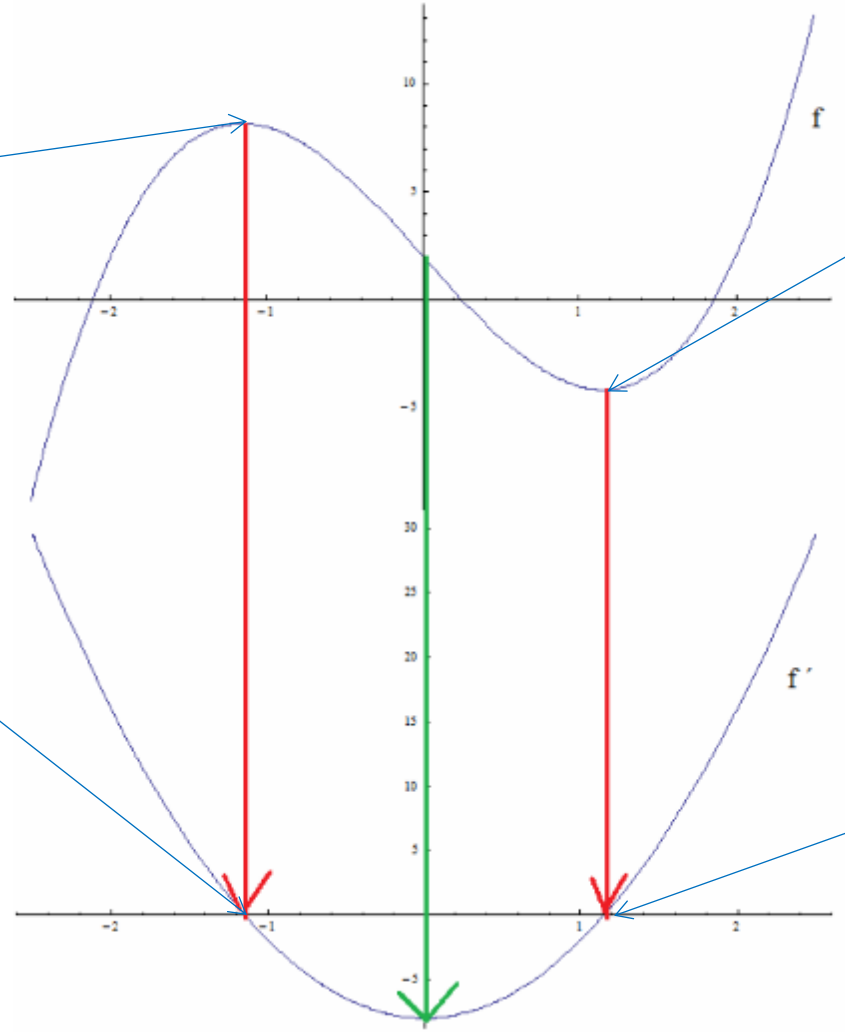
- $f''(x_0) < 0$, dann liegt in x_0 ein lokales Maximum vor.
- $f''(x_0) > 0$, dann liegt in x_0 ein lokales Minimum vor.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Zweite Hinreichende Bedingung für Extremwerte

Lokales Maximum → Tangente parallel zu x-Achse, d.h. Steigung gleich Null



Lokales Minimum→ Tangente parallel zu x-Achse, d.h. Steigung gleich Null

Ableitung gleich Null und Steigung wechselt das Vorzeichen von + zu -

Ableitung gleich Null und Steigung wechselt das Vorzeichen von - zu +

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Zweite Hinreichende Bedingung für Extremwerte

Sei f an der Stelle x_0 und in einer Umgebung von x_0 differenzierbar.

- Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel** von „+“ nach „–“ hat, dann ist x_0 lokales Maximum.

- Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel** von „–“ nach „+“ hat, dann ist x_0 lokales Minimum.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

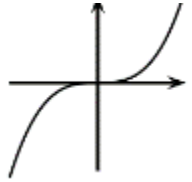
Lokales oder Relatives Extremum

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

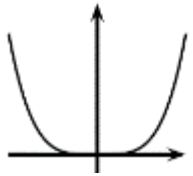
Beispiele

1. Die Funktion $f = x^3$ hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2$,
   also insbesondere $f'(0) = 0$, 0 ist aber keine Extremstelle von f.



2. $f(x) = x^4$ hat in $x_0 = 0$ eine Minimalstelle, es ist $f'(x) = 4x^3$,
   $f''(x) = 12x^2$, also $f''(0) = 0$.

   $f'(x) = 4x^3$ hat in 0 einen Vorzeichenwechsel von „$-$“ zu „$+$“;



14.4 Anwendungen

Extremwertaufgaben

Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben

Von einer zweimal differenzierbaren Funktion $f(x)$ läßt sich der größte (bzw. der kleinste) Wert in einem vorgegebenen Intervall (a, b) wie folgt bestimmen:

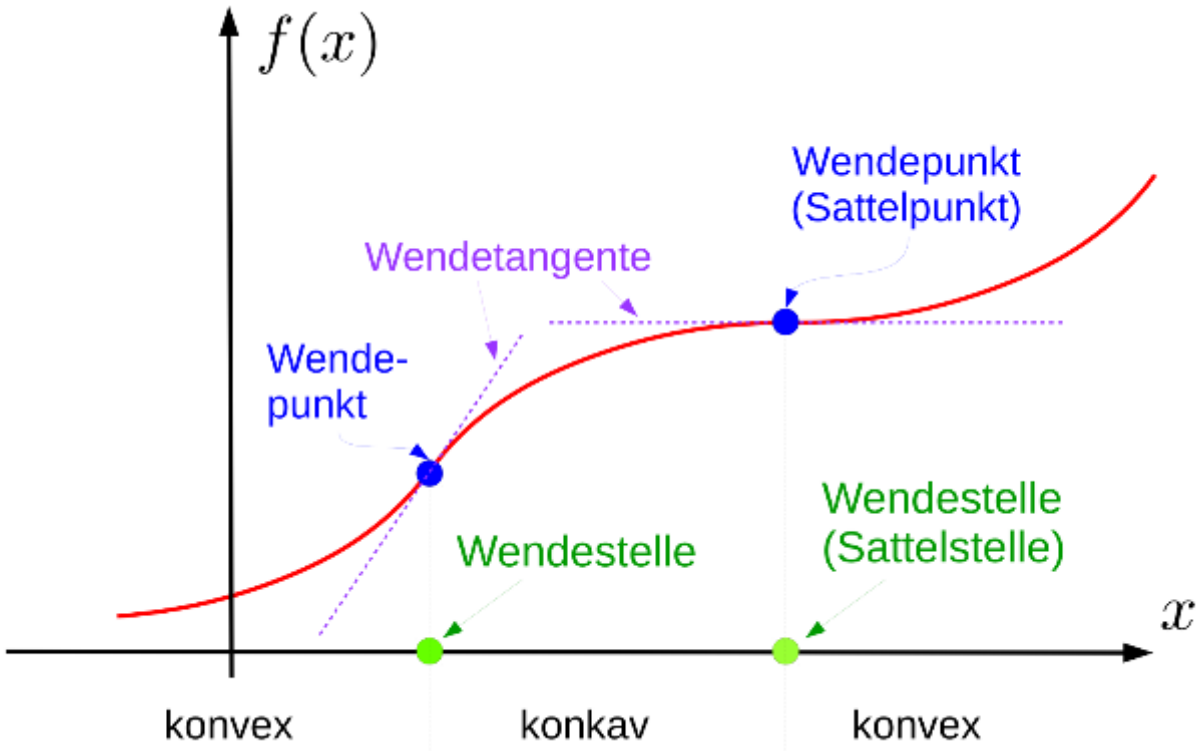
1. Berechnung der im Innern des Intervalls (a, b) liegenden relativen Maxima (oder Minima)
2. Der Vergleich dieser Werte mit den Funktionswerten in den Randpunkten des Intervalls ergibt den gesuchten größten (oder kleinsten) Wert der Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b).

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Wendepunkt / Sattelpunkt



Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

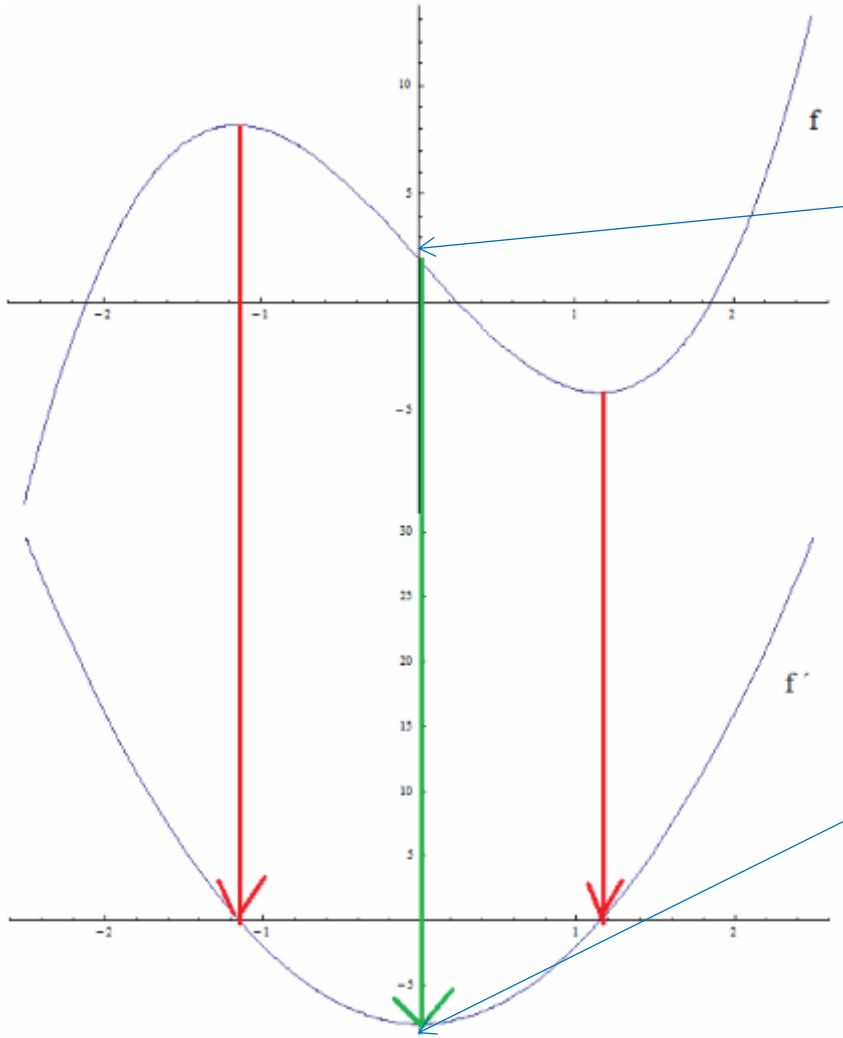
ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Wendepunkt / Sattelpunkt



Steigung der Tangente wird vorher immer **kleiner**
→ **Wendepunkt**, d.h. die Steigung der Tangente **minimal**

Die **1. Ableitungsfunktion** hat **Minimum**,
→ die **2. Ableitung** ist an der Stelle gleich **Null**

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Wendepunkt / Sattelpunkt

- Hinreichende Bedingungen für einen Wendepunkt:

  Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar (mindestens dreimal), $x_W \in (a, b)$, so hat f in x_W einen Wendepunkt wenn

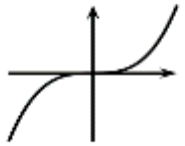
$$f''(x_W) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_W) \neq 0$$

- Wendepunkte mit waagerechter Wendetangente, d.h.

$$f'(x_W) = 0$$

  heißen **Sattelpunkte**.

z. B. $x_0 = 0$ bei $f(x) = x^3$



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Kurvendiskussion - Eigenschaften

1. Den maximal möglichen Definitionsbereich bestimmen;
2. Die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse angeben;
3. Symmetrieverhalten
   - Achsensymmetrisch $f(-x) = f(x)$
   - Punktsymmetrisch $f(-x) = -f(x)$
4. Extremstellen
5. Wendestellen
6. Krümmungsverhalten
7. Grenzwerte der Funktion um die Definitionslücken und für plus/minus Unendlichkeit oder an den Definitionsbereich-Grenzen ausrechnen
8. Wertebereich von $f(x)$.
9. Skizze des Funktionsgraphen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Kurvendiskussion - Beispiel

Wir diskutieren die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. **Untersuchung auf Symmetrien**
   Die Funktion enthält nur gerade Potenzen von x*, ist daher gerade.*

2. **Bestimmung des Definitions- und Wertebereichs**
   Die Funktionen x^2 *und* e^x *sind für alle reellen Zahlen definiert. Daraus folgt für den Definitionsbereich* $D = \mathbb{R}$*. Die Bestimmung des Wertebereiches stellen wir zunächst zurück.*

3. **Bestimmung Nullstellen und y-Achsenabschnitt**
   Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen, somit hat auch $f(x)$ *keine.* $f(0) = e^0 = 1$.

4. **Auffinden von Unstetigkeiten**
   Beide Funktionen sind im Definitionsbereich stetig. Also ist auch $f(x)$ *stetig.*

5. **Asymptoten**
   Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

   Daher ist die x-Achse sowohl für $x \to -\infty$ *als auch für* $x \to \infty$ *die Asymptote.*

6. **Auffinden der Extremwerte, Steigen bzw. Fallen** *Wir berechnen die ersten drei Ableitungen.*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f'(x) &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ f''(x) &= (-1+x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f'''(x) &= (3x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.4 Anwendungen

Kurvendiskussion - Beispiel

Wir diskutieren die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Wir suchen die Nullstelle(n) der ersten Ableitung. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, gilt

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Einsetzen in die zweite Ableitung liefert

$$f''(x_0) = -e^0 < 0$$

Also liegt dort ein Maximum vor. Der Funktionswert dort beträgt 1. *Damit steht auch der Wertebereich* $W =]0, 1]$ *fest.*

Weiter gilt

$$f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]0, \infty[$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]-\infty, 0[$$

7. **Untersuchung des Krümmungsverhaltens (konvex, konkav, Wendepunkte)**

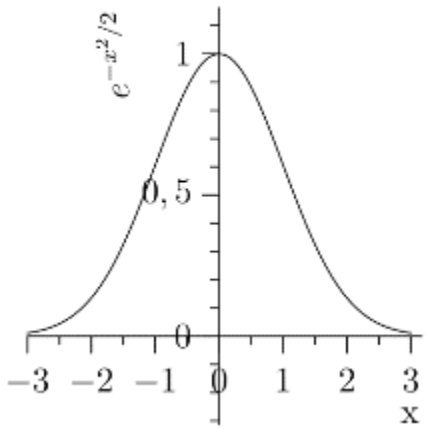
Für die Nullstellen der zweiten Ableitung gilt

$$f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_W = \pm 1$$

Da $f'''(\pm 1) \neq 0$ *sind dieses Wendepunkte. Für die Vorzeichen der zweiten Ableitung gilt*

$$f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]-\infty, -1[$$
$$f''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]-1, 1[$$
$$f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]1, \infty[$$

8. **Funktionsbild**



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Übersicht

Kapitel:		Foliennummer:
1.	Rechengesetze	Folie 4
2.	Elementare Gleichungen	Folie 38
3.	Anordnung und Betrag	Folie 48
4.	Potenzen	Folie 57
5.	Quadratische Gleichungen	Folie 73
6.	Wurzelgleichungen	Folie 84
7.	Gleichungen n-ten Grades	Folie 90
8.	Logarithmen	Folie 104
9.	Lineare Gleichungssysteme	Folie 112
10.	Funktionen	Folie 134
11.	Ungleichungen	Folie 200
12.	Elementargeometrie	Folie 209
13.	Vektoren – Grundbegriffe	Folie 219
14.	Ableitung – Grundbegriffe	Folie 249
15.	Integral – Grundbegriffe	Folie 307

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15. Integral – Grundbegriffe

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative
Hochschule

Eine gemeinsame Initiative
von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Einführung

- Grundvorstellungen der Integralrechnung:
  - Berechnung von **Flächen-** oder allgemeiner **Volumenmaßen**
  - Integrieren als **Umkehrabbildung** des **Differenzierens**
- Beide Definitionen sind gleichwertig.
- Der erste Sachverhalt wird durch die ”**Riemann’schen Summen**” repräsentiert.
- Der Zweite durch den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion

- Die Aufgabe der **Differentialrechnung**:

  Von einer Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $y' = f'(x)$ zu ermitteln;

- Die Aufgabe der **Integralrechnung**:

  Zu einer Ableitungsfunktion $f(x) = F'(x)$ die ursprüngliche Stammfunktion $F(x)$ zu finden.

- Die einfachsten Fälle sieht man sofort:

$F'(x)$ gegeben	$F(x)$ gesucht
e^x	
$2x$	
$\sin x + \cos x$	
$\frac{1}{x}$	
a	

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion

- Die Aufgabe der **Differentialrechnung**:

  Von einer Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $y' = f'(x)$ zu ermitteln;

- Die Aufgabe der **Integralrechnung**:

  Zu einer Ableitungsfunktion $f(x) = F'(x)$ die ursprüngliche Stammfunktion $F(x)$ zu finden.

- Die einfachsten Fällt sieht man sofort:

$F'(x)$ gegeben	$F(x)$ gesucht
e^x	e^x
$2x$	x^2
$\sin x + \cos x$	$-\cos x + \sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
a	ax

Ist $F(x)$ gefunden, dann ist $F(x) + C$ auch eine **Stammfunktion**, denn die Ableitung einer Konstante ist gleich Null: $(F(x) + C)' = F'(x)$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion

- Die Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist, nennen wir **Stammfunktion zu f**.
- Die Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ schreibt man auch

$$F(x) = \int f(x)dx$$

- Die **rechte Seite** dieser Gleichung nennt man **unbestimmtes Integral**.
- Jede Stammfunktion ist bis auf **eine Konstante eindeutig**. Denn es gilt:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = F'(x)$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Stammfunktion - **Beispiel**

- $\boldsymbol{f(x) = 2x}$ ist linear

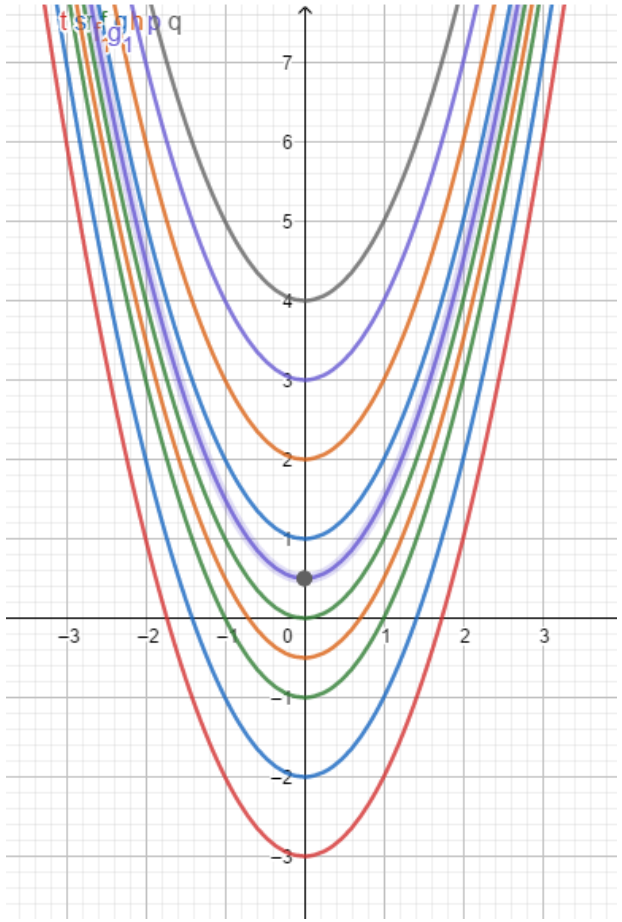
  Gesucht: alle $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = 2x$ bzw.

  $$F(x) = \int 2x \, dx$$

  Dies sind quadratische Funktionen:

  $$F(x) = x^2 + C$$

- Geometrisch bedeutet es eine **Kurvenschar von Normalparabeln**, die entlang der y-Achse um C verschoben sind.



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale

- **Die Menge aller unbestimmten Integrale** der Funktion $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$f(x)$ = "Integrand"

C = "Integrationskonstante"

- Angabe des Integrals **ohne** konkrete **Integrationsgrenzen**.
- **Grundintegrale** kann man erraten, sollte aber auswendig lernen!

$f(x)$	$F(x)$	
x^p	$\frac{1}{p+1}\,x^{p+1}$	vorausgesetzt $p \neq -1$
a^x	$\frac{1}{\ln a}\,a^x$	für jedes $a > 0,\ a \neq 1$
e^x	e^x	
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int 0\,dx = C \qquad \int 1\,dx = x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C, \quad n = -1$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0 \text{ und } a \neq 1 \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale - Formelkärtchen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + C$	$sin(x)$	$-cos(x) + C$
$cos(x)$	$sin(x) + C$	$sinh(x)$	$cosh(x) + C$
$cosh(x)$	$sinh(x) + C$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$ln(x) + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x) + C$
$\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}$	$\ln(\sqrt{(x-a)^2+b^2}) + C$	$\frac{1}{(x-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\arctan(\frac{x-a}{b}) + C$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.1 Unbestimmtes Integral

Grundintegrale - Beispiele

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $\int x^5 dx$

b) $\int \frac{1}{x-1} dx$

c) $\int \frac{1}{2-x} dx$

d) $\int \frac{1}{2x-1} dx$

e) $\int \frac{1}{x^2} dx$

f) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

g) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$f(x)$	$F(x)$	
x^p	$\frac{1}{p+1} x^{p+1}$	vorausgesetzt $p \neq -1$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$	für jedes $a > 0,\ a \neq 1$
e^x	e^x	
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.2 Rechenregeln

Überblick

1. Faktorregel: Ein konstanter Faktor k darf vor das Integral gezogen werden.

$$\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Summenregel: Eine Summe von Funktionen darf summandenweise integriert werden.

$$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm g(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Partielle Integration: Die partielle Integration kann verwendet werden, wenn man ein Produkt zweier Funktionen integriert. Sie leitet sich aus der Produktregel der Differentialrechnung her.

$$\int F(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \cdot G(x) - \int f(x) \cdot G(x)\,\mathrm{d}x$$

Dabei gilt $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$.

Beispiel:

$$\int \left(x^4 - 5x^3 - 1\right)\mathrm{d}x = \int x^4\,\mathrm{d}x - 5\int x^3\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - x + c$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.2 Rechenregeln

Produktregel - Partielle Integration

Suche die Stammfunktion

$$\int F \cdot g \, \mathrm{d}x = F \cdot G - \int f \cdot G \, \mathrm{d}x$$

mit $F' = f$ und $G' = g$

Leite den Faktor ab

Beispiel:

$$\int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{1}{4}x^4\right) - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

$$= \frac{1}{16}x^4(4 \ln x - 1) + C$$

Partielle Integration:

$$F = \ln x \Rightarrow F' = f = \frac{1}{x}$$

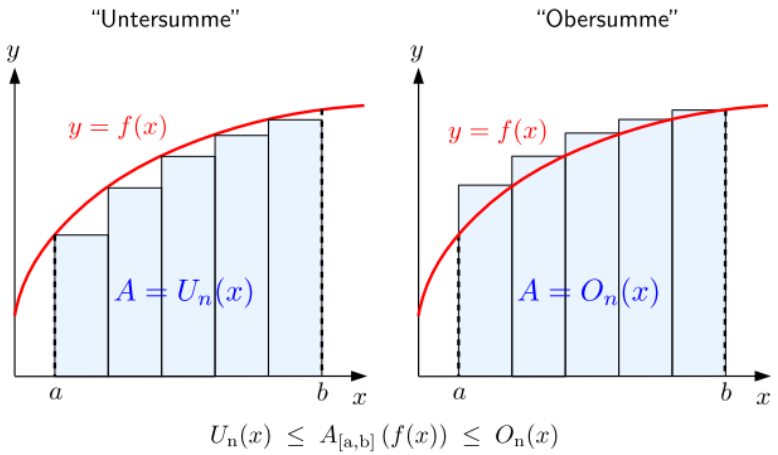
$$g = x^3 \Rightarrow G = \frac{1}{4}x^4$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Flächenbestimmung – Das bestimmte Integral

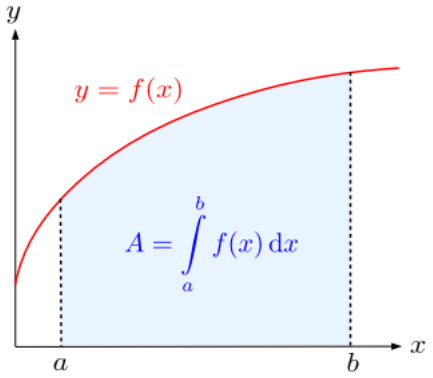
- Die Integralrechnung ist ursprünglich geometrisch motiviert (wie viele andere Probleme aus der Analysis)
- **Näherungen für den Flächeninhalt** zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen den senkrechten Geraden durch $(a|0)$ und $(x|0)$ mit Hilfe der:
  - „**Untersumme**“ – der Flächeninhalt **unter** dem Graphen von $f(x)$
  - „**Obersumme**“ – der Flächeninhalt **über** dem Graphen von $f(x)$



- Integral als Summe infinitesimal kleiner Unterteilungen von $[a, b]$:

Bestimmtes Integral von $f(x)$ in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$:

$$A = I = \lim_{n\to\infty} O_n(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k_i)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



- Die Funktion $f(x)$ heißt **Integrand**, a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**

Riemann`sche Summen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

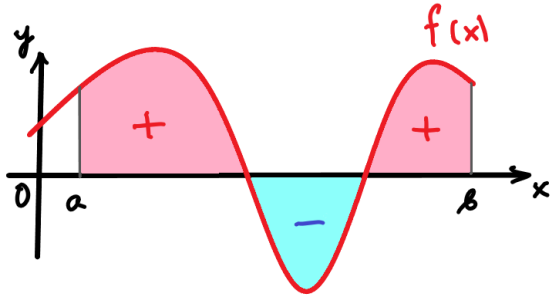
Flächenbestimmung – Integrierbarkeit

- Eine Funktion ist in $[a, b]$ nur dann integrierbar, wenn sie in $[a, b]$ beschränkt ist
- **Jede** in [a, b] **stetige oder stückweise stetige Funktion** mit endlich vielen Sprungstellen ist integrierbar
- Ist eine **Funktion** im Intervall $[a, b]$ **negativ**, d.h. $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch das bestimmte Integral negativ:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$$

- Das bestimmte Integral ist somit **vorzeichenbehaftet**, d.h. die Flächenanteile unterhalb der x-Achse werden als negativ gezählt.

***Beschränkt**: Kurve in einem zur x-Achse parallelen Streifen*



Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

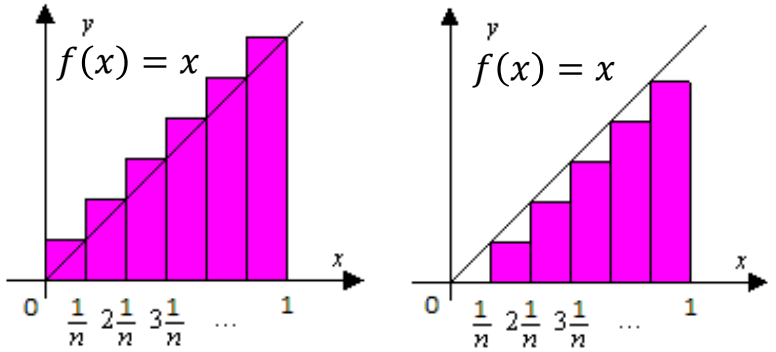
Flächenbestimmung – Das bestimmte Integral

Beispiel: Wir berechnen

$$\int_0^1 x\,dx$$

Die Funktion ist stetig. Deshalb kann man bei der Wahl der Parameter für die Riemann´sche Summe recht großzügig sein.

Wir teilen Intervall $[0,1]$ in $\boldsymbol{n}$ gleiche Abschnitte. Wir definieren für einen beliebigen Punkt der Aufteilung $\boldsymbol{x_k = \frac{1}{n} \cdot k}$



Damit ist die Länge einer Aufteilung des Intervalls: $\boldsymbol{\Delta x_k = \frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\boldsymbol{x_k})\boldsymbol{\Delta x_k} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\frac{1}{n}} \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Gaußsche Summenformel:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Wir lassen nun $n \to \infty$ und es gilt $F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad = \frac{1}{2}$

Dieses Ergebnis ist offensichtlich richtig.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Hauptsatz der Integralrechnung

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

das **bestimmte Integral** von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$

Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$:

1) Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ zum Integranden $f(x)$
2) Berechnung der Werte $F(a)$ und $F(b)$ an den Integrationsgrenzen a und b
3) Berechnung der Differenz $F(b) - F(a)$

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

Eigenschaften

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Zerlegung des Integrationsintervalls in Teilintervalle:
Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Vertauschung der Integrationsgrenzen:
Vertauschen der beiden Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Für $a = b$ ist der Integralwert gleich Null: $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

15.3 Bestimmtes Integral

Hauptsatz der Integralrechnung - Aufgaben

Berechnen Sie:

a) $\int_1^2 \frac{3}{x^2}\,dx$

b) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \cos x\,dx$

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

e) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

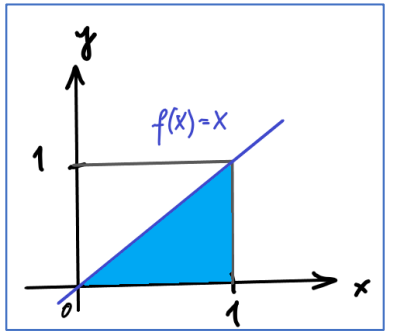
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

15.3 Bestimmtes Integral

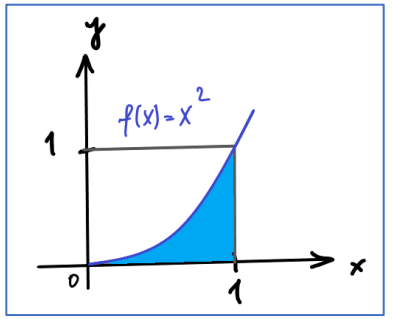
Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

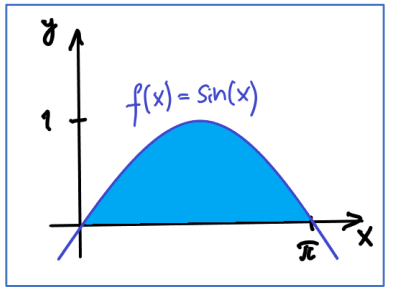
$$1.)\ \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$



$$2.)\ \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$



$$3.)\ \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$



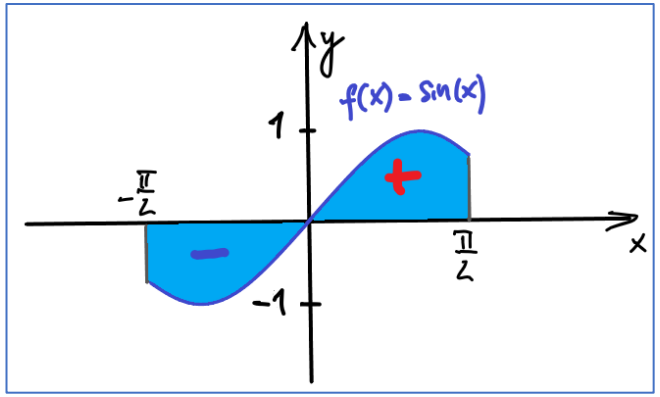
15.3 Bestimmtes Integral

Zusammenhang zwischen Fläche und Integral

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

4.) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 - 0 = 0$$



Mit der Nullstelle $x = 0$ erhalten wir als **nicht vorzeichenbehaftete** Fläche:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x \right| = \left| -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \right| + \left| -\cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| -\cos(0) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \right| + \left| -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) \right| = |-1 - (-0)| + |-0 - (-1)| = 1 + 1 = \mathbf{2}$$