Übersicht

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

14. Ableitung – Grundbegriffe

Hochschule
Flensburg
University of
Applied Sciences

14.1 Grundvorstellung
Grundbegriffe

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

- Wir betrachten nur reellwertige Funktionen
- Wichtige Eigenschaften einer Kurve:
  - Stetigkeit: Kann eine Funktion in einem Zuge gezeichnet werden?
  - Differenzierbarkeit - Glattheit und Steigungsverhalten einer Funktion

14.1 Grundvorstellung
Stetigkeit

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

- **Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt c:**

  Eine **Funktion f** heißt **stetig in einem Punkt c,** wenn

  - f in **c definiert** ist und
  - der Grenzwert $\lim_{x\to c} f(x)$ **existiert** und
  - stimmt mit dem Funktionswert überein: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

- **Einseitige Stetigkeit:**

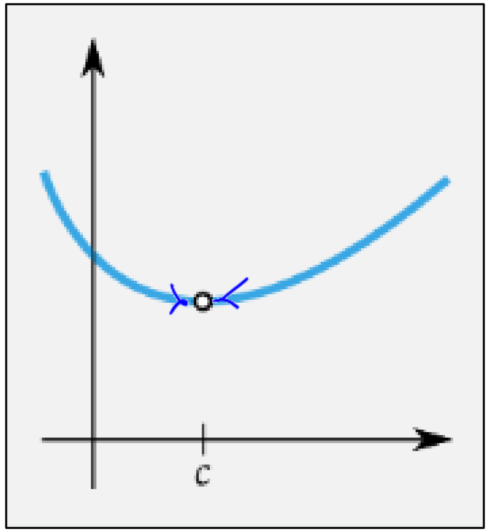
  linksseitig stetige Funktion in c, wenn gilt: $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$

  rechtsseitig stetige Funktion in c, wenn gilt: $\lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$

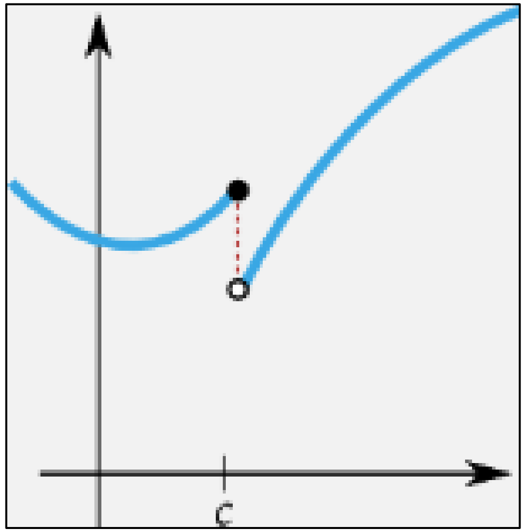
- **Stetigkeit in einem Intervall:**

  Eine Funktion f heißt **stetig** in einem **offenen Intervall** (a, b), wenn sie **für alle Punkte** $x \in (a, b)$ stetig ist.
  An den **Rändern** des Intervalls kann man lediglich **einseitige Stetigkeit** untersuchen.

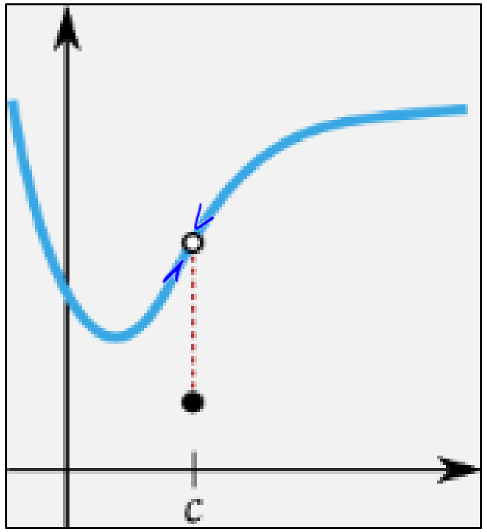
14.1 Grundvorstellung
Stetigkeit



$f(x)$ ist an der Stelle c nicht definiert → **nicht stetig**



An der Stelle c existiert nur **linksseitiger Grenzwert** → $f(x)$ ist **linksseitig stetig**



Der Grenzwert stimmt nicht mit dem Funktionswert überein

$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ → **nicht stetig**

https://matheguru.com/allgemein/stetigkeit-von-funktionen.html

14.1 Grundvorstellung
Momentane Geschwindigkeit

Ein Auto fährt an einem bestimmten Zeitpunkt los und fährt geradeaus.

- zum Zeitpunkt t_0:   zurückgelegter Weg y_0 Meter;
- zum Zeitpunkt t: zurückgelegter Weg (vom Punkt y_0 aus) y Meter.

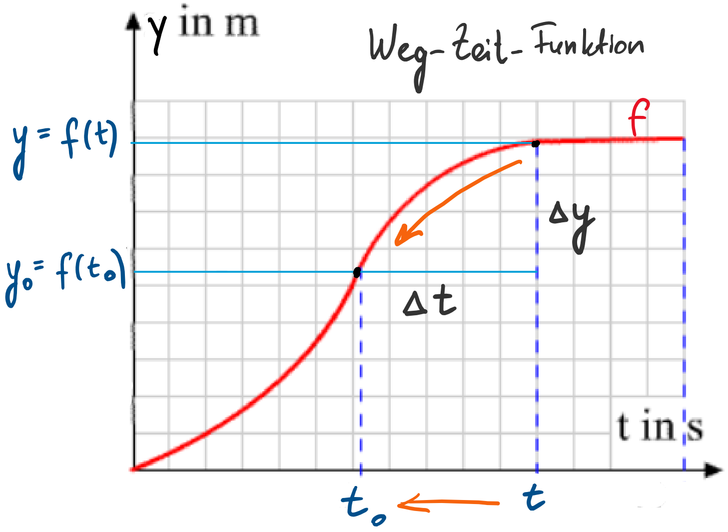
$y = f(t)$ ist eine *Weg-Zeit-Funktion*.

Zeit von t_0 bis t: $\Delta t = t - t_0$

In der Zeit $\Delta t = t - t_0$ zurückgelegte Strecke: $\Delta y = f(t) - f(t_0)$

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** $\boldsymbol{v_{t_0,t}}$: „Weg durch Zeit“

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



14.1 Grundvorstellung
Momentane Geschwindigkeit

Ein Auto fährt an einem bestimmten Zeitpunkt los und fährt geradeaus.

- zum Zeitpunkt t_0: zurückgelegter Weg y_0 Meter;
- zum Zeitpunkt t: zurückgelegter Weg (vom Punkt y_0 aus) y Meter.

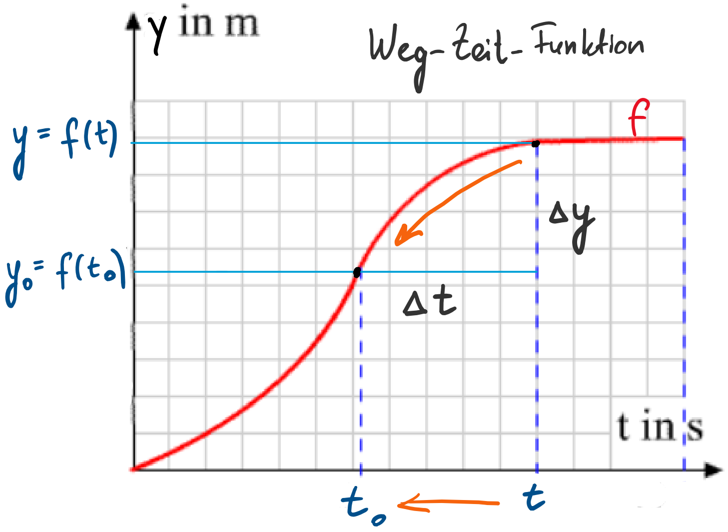
$y = f(t)$ ist eine *Weg-Zeit-Funktion*.

Zeit von t_0 bis t: $\Delta t = t - t_0$

In der Zeit $\Delta t = t - t_0$ zurückgelegte Strecke: $\Delta y = f(t) - f(t_0)$

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit $v_{t_0,t}$**: „Weg durch Zeit"

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



Je dichter t an t_0 heranrückt, desto näher kommt der Wert $v_{t_0,t}$ der **Momentangeschwindigkeit v_{t_0}**, also der Geschwindigkeit auf dem Tacho (Grenzwertübergang):

$$\boxed{v_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}$$

Dies ist die **Ableitung von der Funktion $f(t)$ an der Stelle t_0**:

$$\boxed{f'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}$$

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung
Momentane Geschwindigkeit

Ein Auto fährt an einem bestimmten Zeitpunkt los und fährt geradeaus.

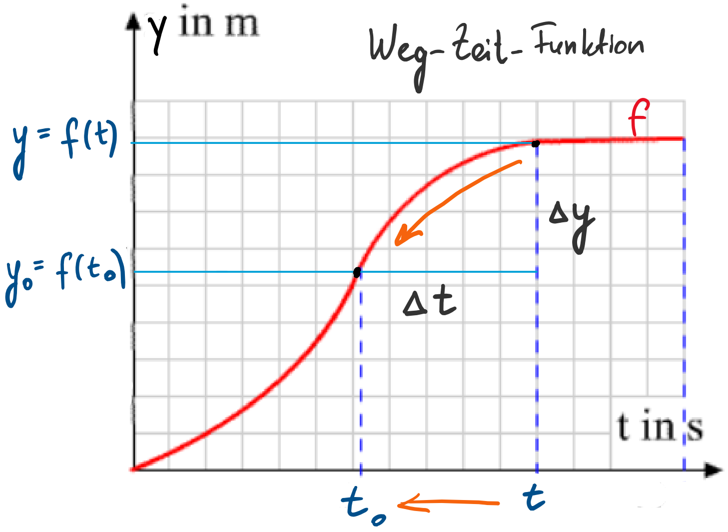
- zum Zeitpunkt t_0: zurückgelegter Weg y_0 Meter;
- zum Zeitpunkt t: zurückgelegter Weg (vom Punkt y_0 aus) y Meter.

$y = f(t)$ ist eine *Weg-Zeit-Funktion*.

Zeit von t_0 bis t: $\Delta t = t - t_0$

In der Zeit $\Delta t = t - t_0$ zurückgelegte Strecke: $\Delta y = f(t) - f(t_0)$

Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** $\boldsymbol{v_{t_0,t}}$: „Weg durch Zeit"



Differenzen-quotient

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Je dichter t an t_0 heranrückt, desto näher kommt der Wert $v_{t_0,t}$ der **Momentangeschwindigkeit** $\boldsymbol{v_{t_0}}$, also der Geschwindigkeit auf dem Tacho (Grenzwertübergang):

Differential -quotient

$$v_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Dies ist die **Ableitung von der Funktion $\boldsymbol{f(t)}$ an der Stelle $\boldsymbol{t_0}$**:

$$f'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

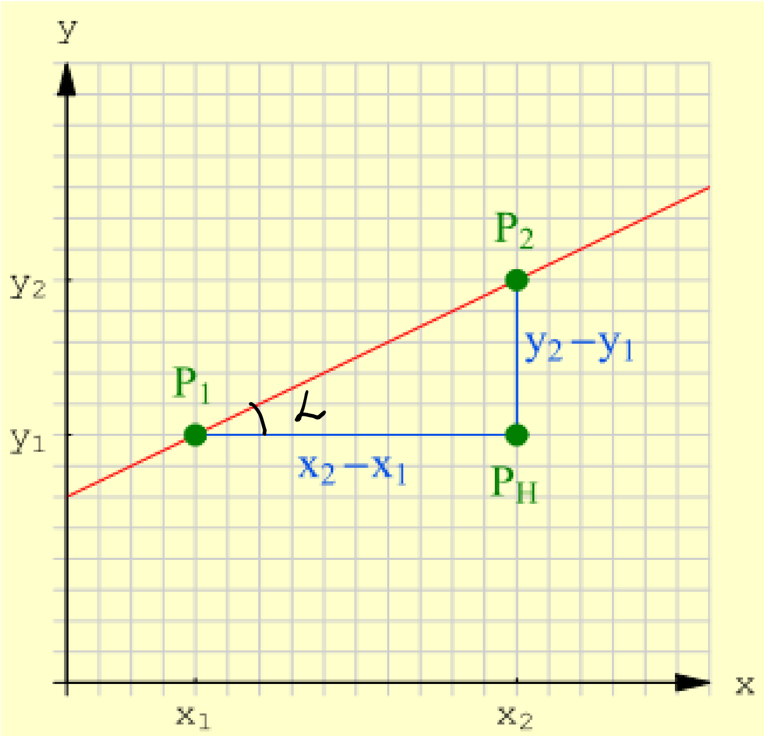
14.1 Grundvorstellung
Tangentenproblem

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Steigung einer Geraden?

→ Steigungsdreieck

$$\boxed{\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta x}}$$



Steigung einer Kurve? …

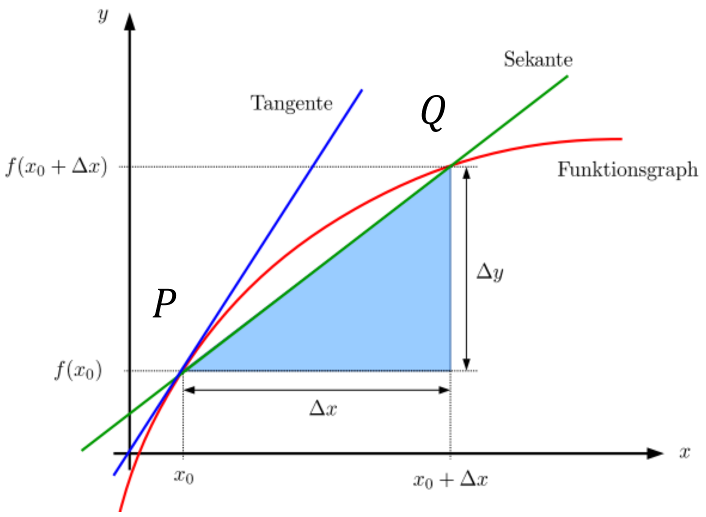
14.1 Grundvorstellung
Tangentenproblem

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Steigung einer Kurve? …

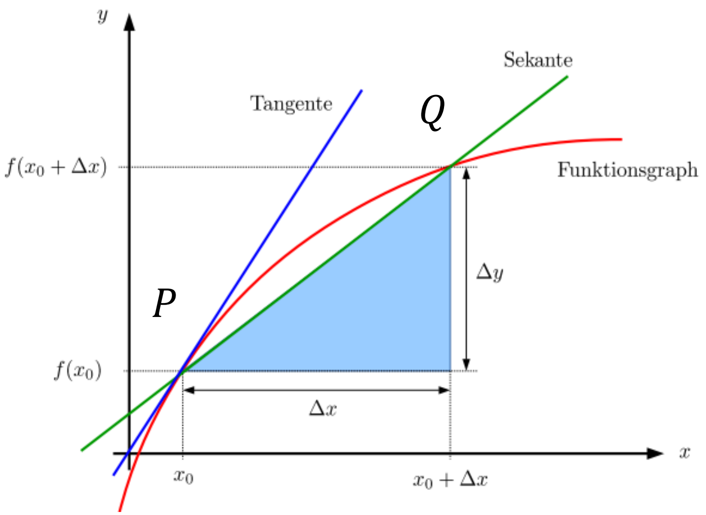
Steigung der Sekante $\boldsymbol{PQ}$ = m_t mittlere Steigung des Kurvenstückes PQ:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$



14.1 Grundvorstellung
Tangentenproblem

Steigung einer Kurve? …



Steigung der Sekante PQ = m_s mittlere Steigung des Kurvenstückes PQ:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = m_s$$

Steigung der Tangente?

Wir halten den Punkt Q fest und lassen Q immer näher an P heranrücken, so dreht sich die Sekante PQ um P und nähert sich einer Grenzgeraden t, der **Tangente** an f in x_0

$$m_t = \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} m_s} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x - x_0 \to 0} \frac{f(\cancel{x_0} + x - \cancel{x_0}) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

14.1 Grundvorstellung
Tangentenproblem

$y(x) \rightarrow \frac{dy}{dx}$

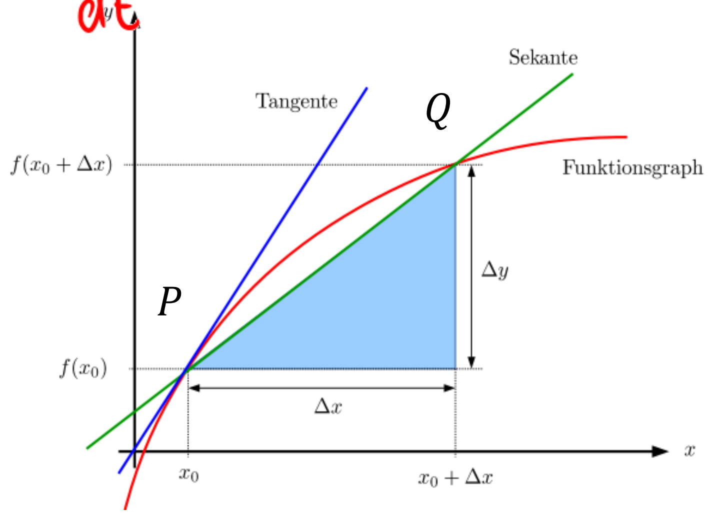
$f(x) \rightarrow \frac{df}{dx}$

$f(t) \rightarrow \frac{df}{dt}$

Steigung einer Kurve? …

Steigung der Sekante PQ = m_t mittlere Steigung des Kurvenstückes PQ:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$



Steigung der Tangente?

Wir halten den Punkt Q fest und lassen Q immer näher an P heranrücken, so dreht sich die Sekante PQ um P und nähert sich einer Grenzgeraden t, der **Tangente** an f in x_0

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x - x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Für $\Delta x \to 0$ geht der Differenzenquotient in den **Differentialquotienten** $\frac{dy}{dx}$ über:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{\text{Grenzwertbildung}}{\longrightarrow} \frac{dy}{dx}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung

Differenzierbarkeit

„f strich von x"

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dieser Grenzwert $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0.

Die Funktion f heißt **differenzierbar** auf (a, b), falls sie in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist.

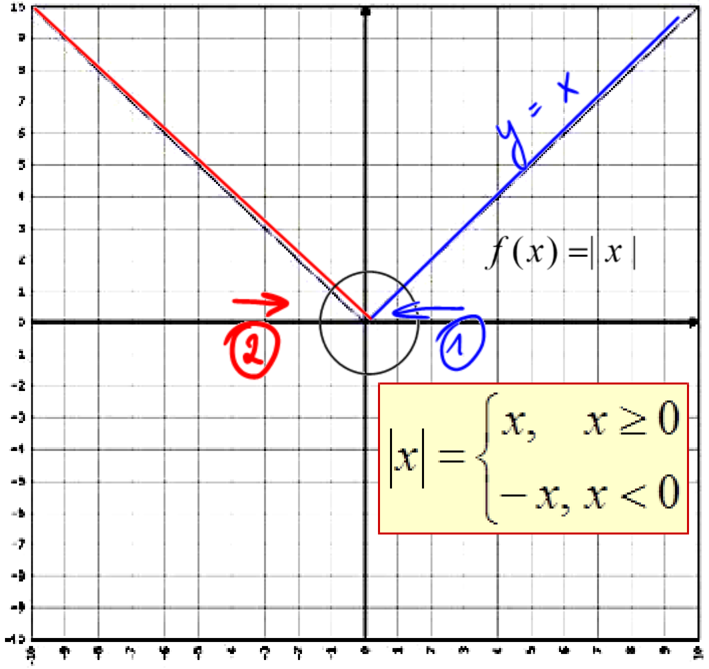
Die **Ableitung** im Punkt x_0 entspricht also gerade der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

$\rightarrow$ Ableiten heißt Linearisieren!

14.1 Grundvorstellung
Differenzierbarkeit

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Gegeben ist die Funktion f mit $\boxed{f(x) = |x|}$



$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Wie verlaufen die Tangenten an der Stelle x = 0? $x_0 = 0$

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}; \qquad x_0 = 0$$

$$\Rightarrow m_s = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}$$

$$\Rightarrow 1.)\ x > 0: \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow 2.)\ x < 0: \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} m_s \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} m_s$$

$$\Rightarrow \nexists \lim$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.1 Grundvorstellung

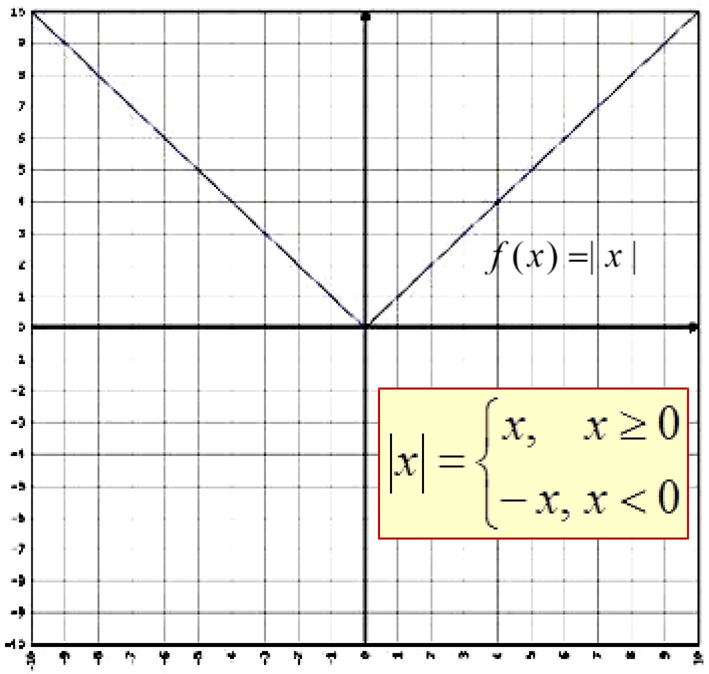
Differenzierbarkeit

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = |x|$



Wie verlaufen die Tangenten an der Stelle x = 0?

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}; \qquad x_0 = 0$$

$$\Rightarrow m_s = \frac{|x|}{x}$$

$$\Rightarrow 1.)\ x > 0: \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

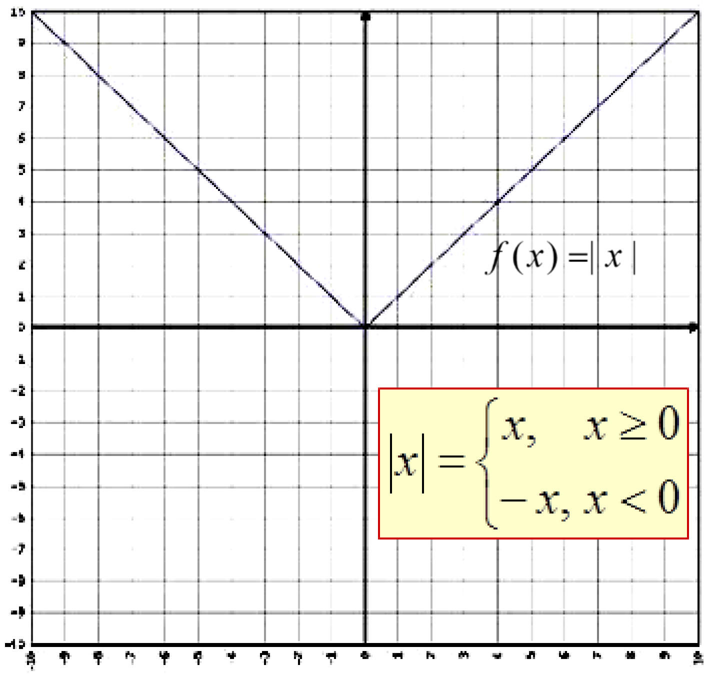
$$\Rightarrow 2.)\ x < 0: \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$\Rightarrow$Es existiert kein Grenzwert an der Stelle x=0

$\Rightarrow$ Es existiert keine Tangente an der Stelle x=0

14.1 Grundvorstellung
Differenzierbarkeit

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = |x|$



Wie verlaufen die Tangenten an der Stelle x = 0?

$$m_s = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}; \qquad x_0 = 0$$

$$\Rightarrow m_s = \frac{|x|}{x}$$

$$\Rightarrow 1.)\ x>0:\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow 2.)\ x<0:\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

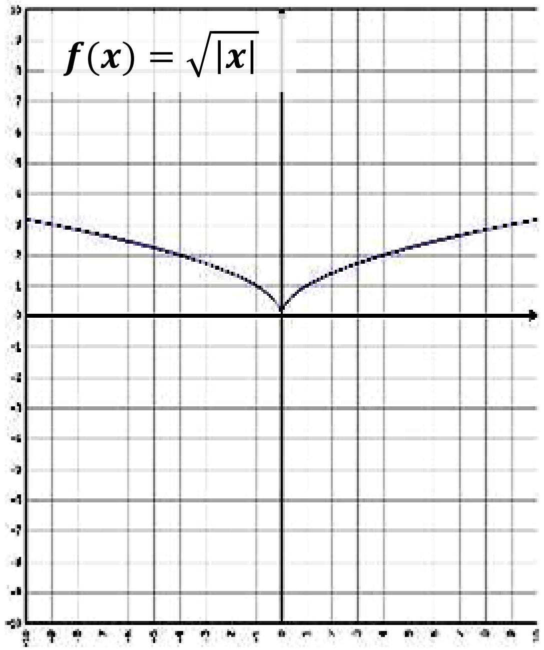
$\Rightarrow$Es existiert kein Grenzwert an der Stelle x=0

$\Rightarrow$ Es existiert keine Tangente an der Stelle x=0

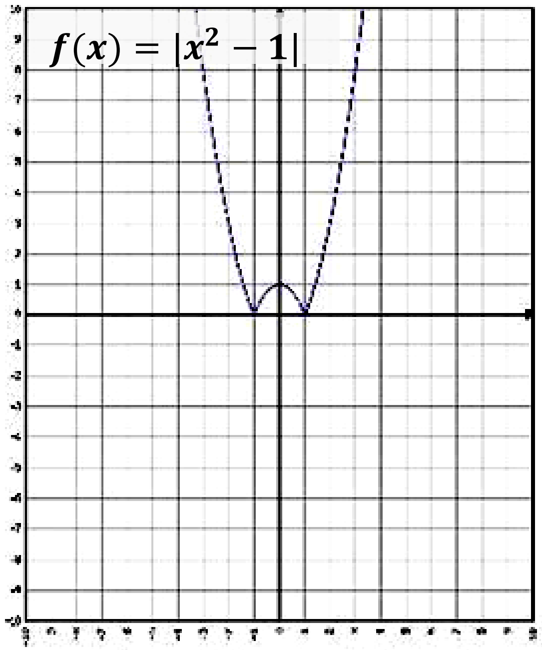
Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar

14.1 Grundvorstellung
Differenzierbarkeit

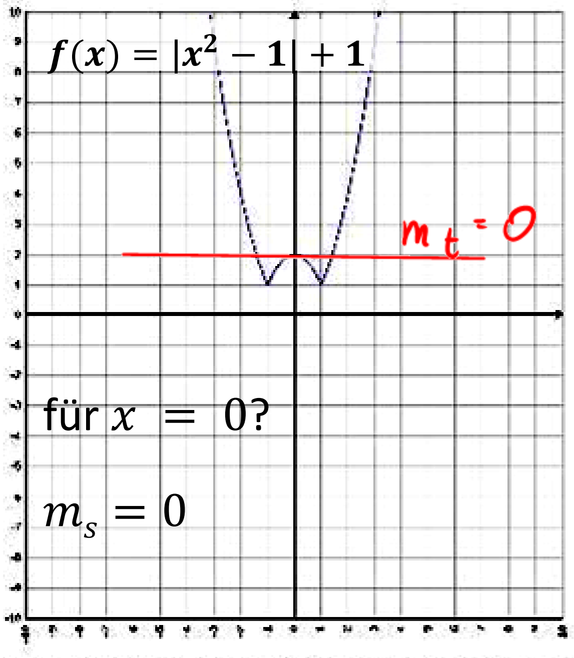
An welchen Stellen ist der Graph der Funktion ist nicht differenzierbar?



für $x = 0$



für $x = 1$
und $x = -1$

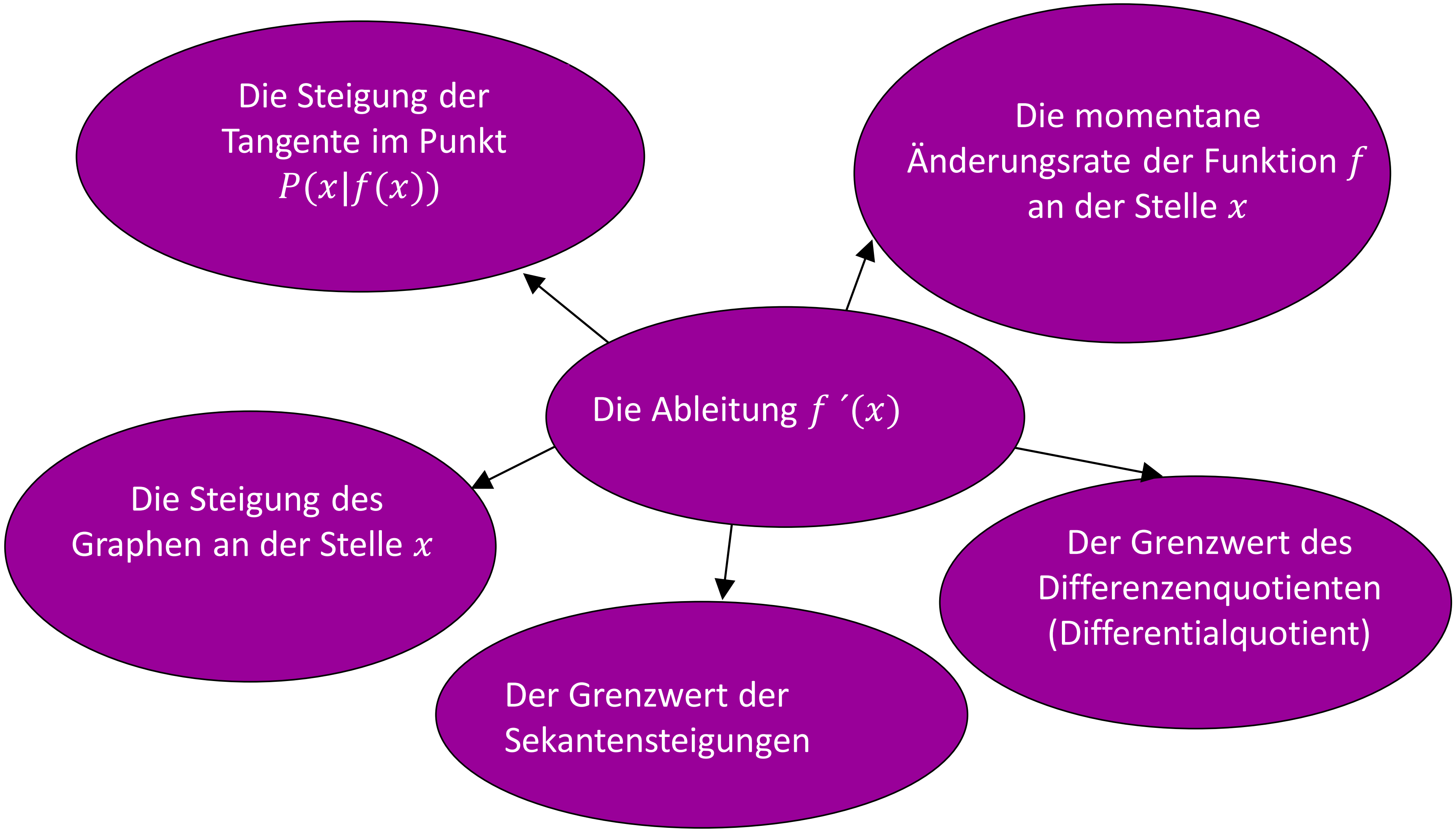


für $x = 1$
und $x = -1$

$f'(0) = 0$

14.1 Grundvorstellung

Ableitung



14.2 Ableitungsfunktion

Ableitungsfunktion

$f^{(IV)}$

$f^{(4)}$ $f^{(5)}$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

- Ableitung f' ist eine Funktion!
  - Sie ordnet jedem x genau ein y (Ableitung)
  - Wir sprechen von einer Ableitungsfunktion
  - Von der Funktion f' kann man erneut die Ableitung bilden
    (f''- **zweite** Ableitung von f, f'''- **dritte** Ableitung, ... f^n – **n-te** Ableitung)

14.2 Ableitungsfunktion

Ableitungsfunktion

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

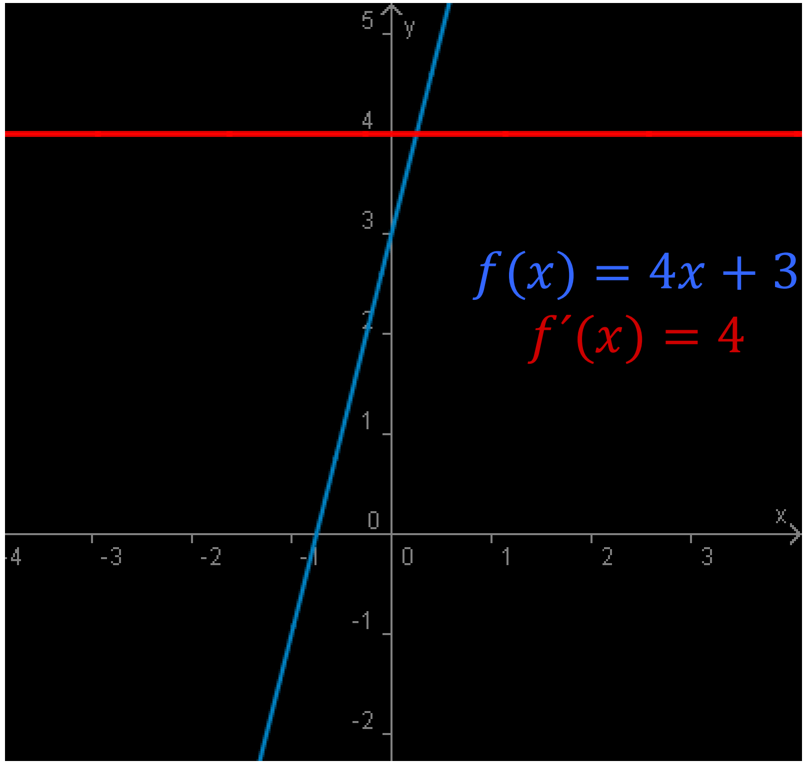
ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

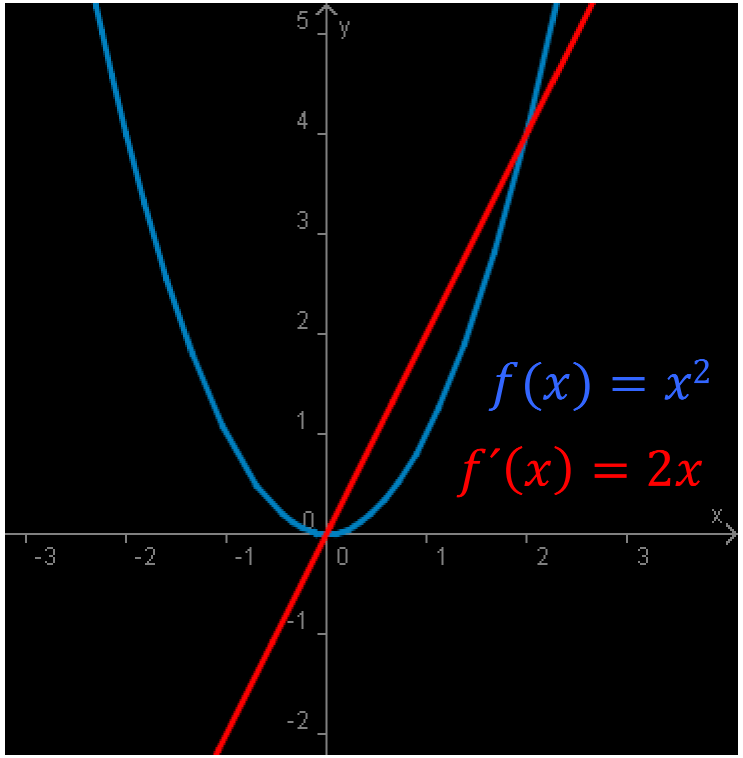
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

- Ableitung f' ist eine Funktion!
  - Sie ordnet jedem x genau ein y (Ableitung)
  - Wir sprechen von einer Ableitungsfunktion
  - Von der Funktion f' kann man erneut die Ableitung bilden (f''- **zweite** Ableitung von f, f'''- **dritte** Ableitung, ... f^n – **n-te** Ableitung)
- Zusammenstellung wichtiger Grundfunktionen f und ihrer Ableitungen f':

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{mx+b}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x^3}$	$\boldsymbol{x^4}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{\sqrt{x}}$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{2x}$	$\boldsymbol{3x^2}$	$\boldsymbol{4x^3}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{x^2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

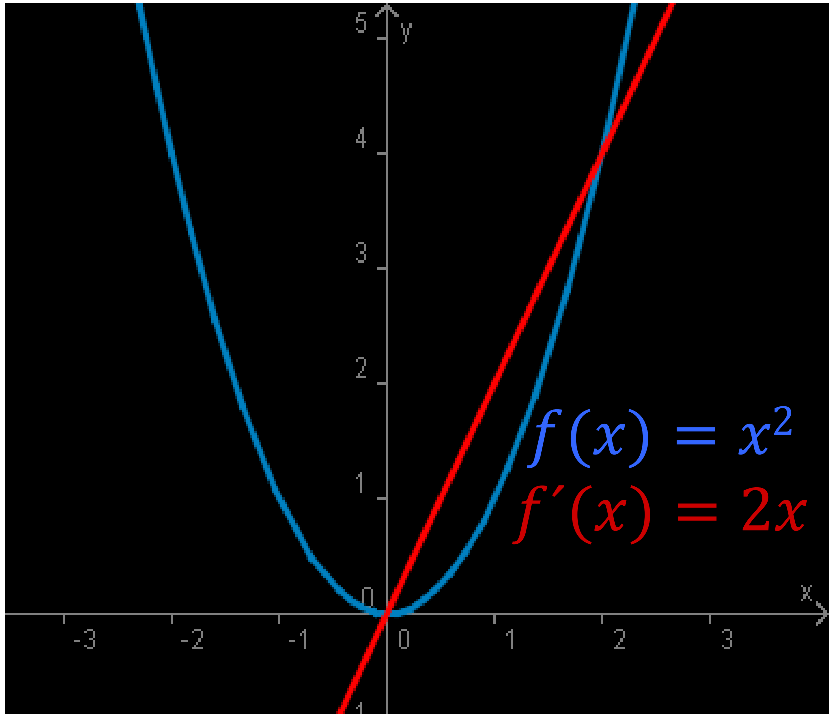
14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

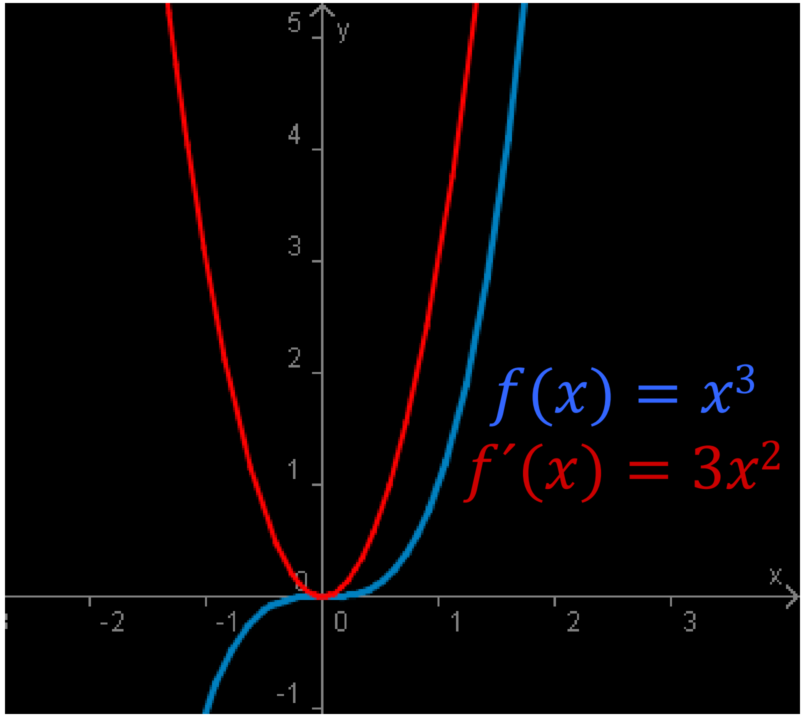




14.2 Ableitungsfunktion

Ableitungen der Grundfunktionen



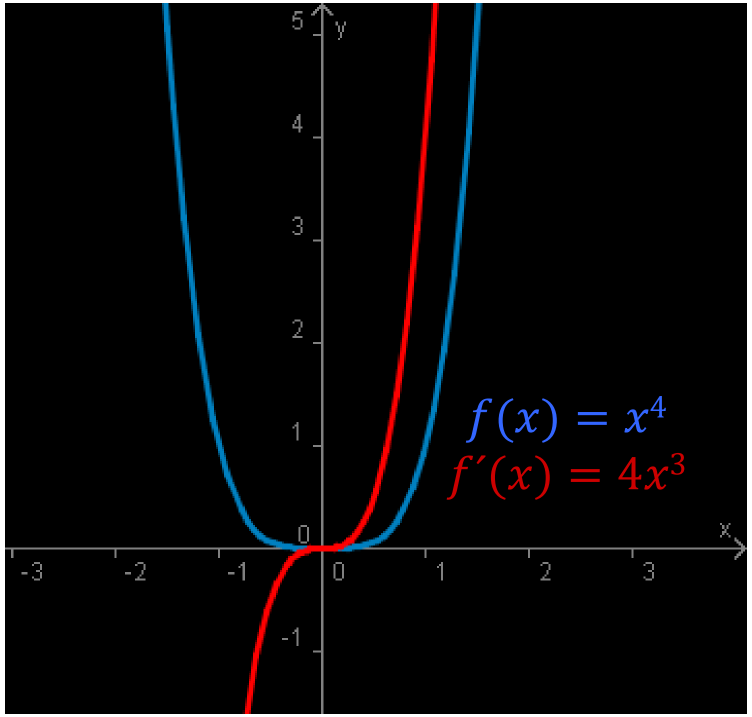


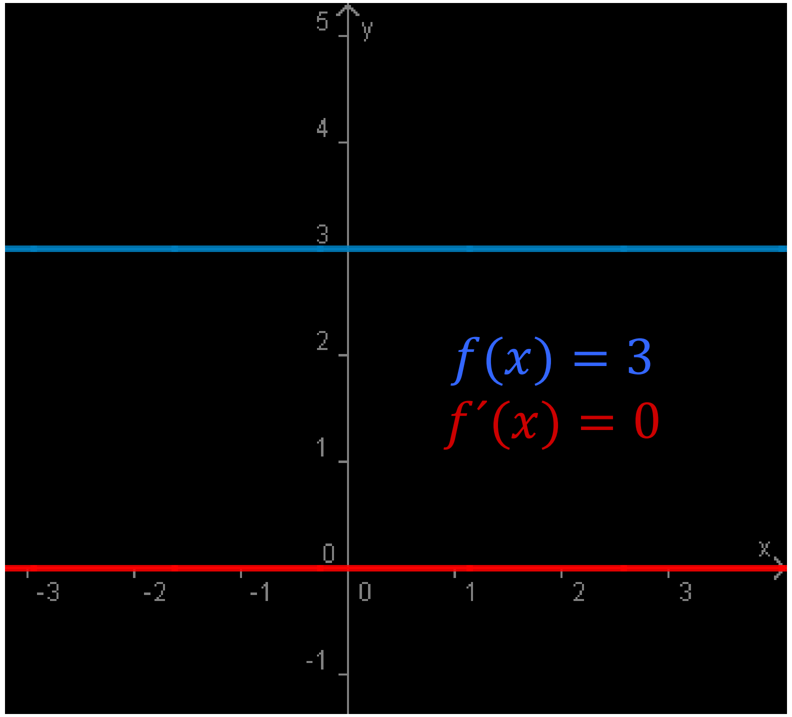
Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen



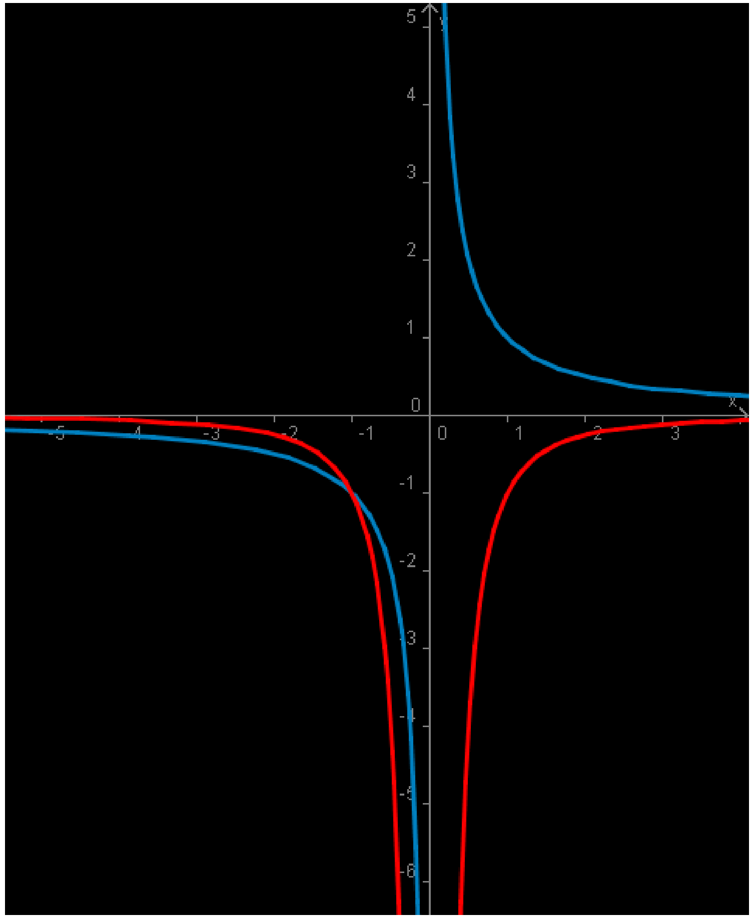


Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

14.2 Ableitungsfunktion

Ableitungen der Grundfunktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos$ und $\tan$ sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar und es gilt:

$$f(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$$

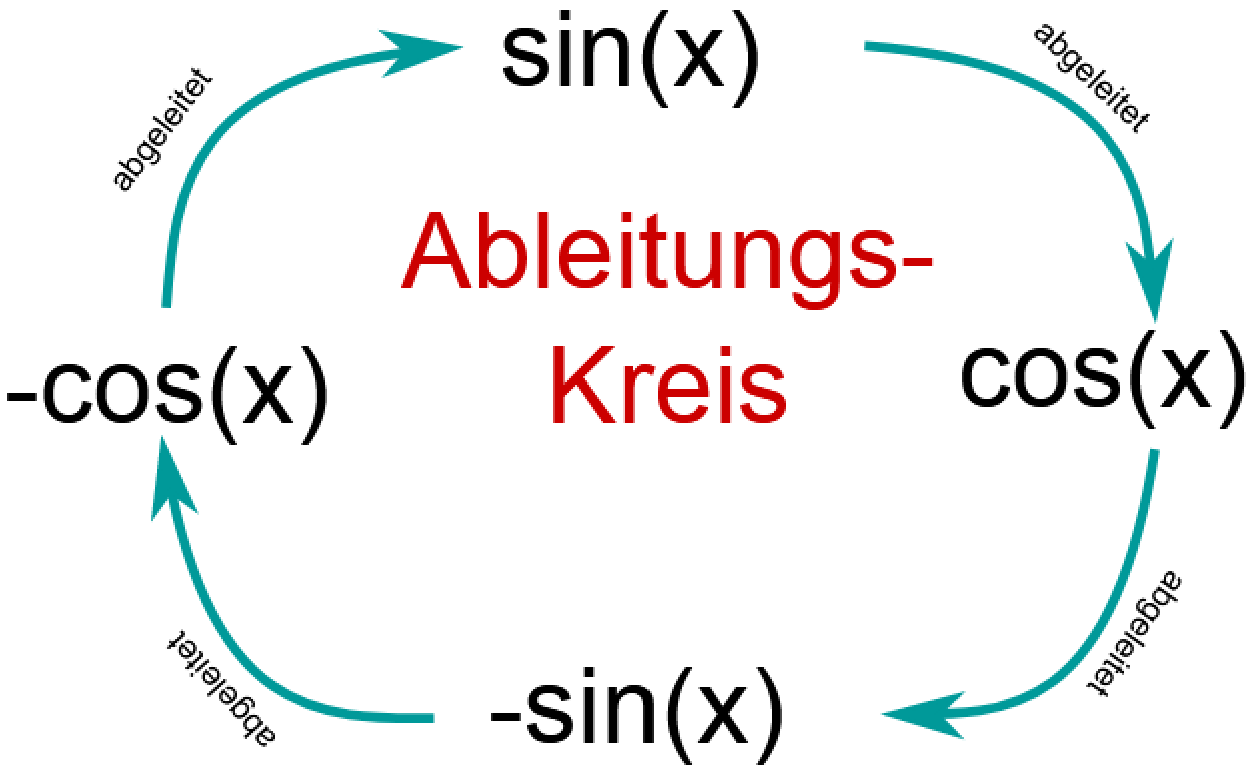
$$f(x) = \tan x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

→ Ableitungskreis

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Ableitungskreis:



14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Ableitung der e-Funktion und der Logarithmusfunktion

$$f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$e^{\ln a} = a \Rightarrow a = e^{\ln a} \Rightarrow a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

Ableitung beliebiger Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = \log_a x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungen der Grundfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkungen
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
speziell :		
1	0	$1 = x^0$
x	1	$x = x^1$
x^2	$2x$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a^x = e^{x \ln a}, \; a \in \mathbb{R}^{>0}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \; x, a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

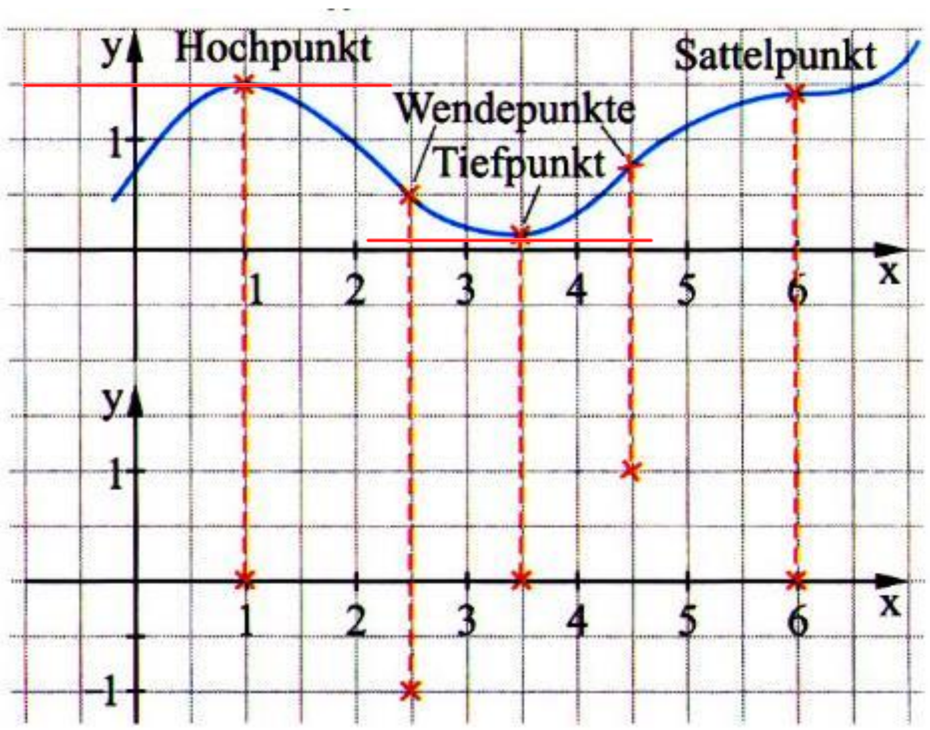
Im Kopf behalten!!!

$$\boxed{\arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

14.2 Ableitungsfunktion
Ableitungskurve – zeichnerisches Ableiten

Schaubild der Ableitungsfunktion durch zeichnerisches Differenzieren bestimmen



- Bestimmen der Tangentensteigungen in den markanten Punkten des Graphen.
- Eintragen der Werte in das darunter gezeichnete Koordinatensystem als Ordinaten.
- Verbinden der erhaltenen Punkte durch eine Kurve

14.2 Ableitungsregeln
Überblick

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Mit den folgenden Regeln kann man die Ableitung zusammengesetzter Funktionen auf Ableitungen einfacherer Funktionen zurückführen.

Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ (im Definitionsbereich) differenzierbare Funktionen, und n und a reelle Zahlen. Dann gilt:

Konstante Funktion $\quad f(x) = a, \quad f'(x) = 0$

Faktorregel $\quad (a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

Summenregel $\quad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Produktregel $\quad \boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

Quotientenregel $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad$ für $g(x) \neq 0$

Potenzregel $\quad f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$

14.2 Ableitungsregeln
Faktorregel

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

$$\left.\begin{array}{lcl} f(x) = 1 \cdot x & \rightarrow & f'(x) = 1 \\ f(x) = 2 \cdot x & \rightarrow & f'(x) = 2 \\ f(x) = 3 \cdot x & \rightarrow & f'(x) = 3 \end{array}\right\} \quad \boxed{f(x) = k \cdot x \rightarrow f'(x) = k}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(x) = 1 \cdot x^2 & \rightarrow & f'(x) = 1 \cdot 2x \\ f(x) = 2 \cdot x^2 & \rightarrow & f'(x) = 2 \cdot 2x = 4x \\ f(x) = 3 \cdot x^2 & \rightarrow & f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x \end{array}\right\} \quad \boxed{f(x) = k \cdot x^2 \rightarrow f'(x) = k \cdot 2x}$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{f(x) = k \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)}$$

Der **Faktor** vor einer Funktion $g(x)$ bleibt folglich beim Ableiten **erhalten** und wird einfach **vor die Ableitung** der Ableitungsfunktion gesetzt.

14.2 Ableitungsregeln
Summenregel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Bei Summen und Differenzen werden alle Terme einzeln abgeleitet.

Beispiel:

$$f(x) = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 1$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)}$$

14.2 Ableitungsregeln
Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

„Ableiten mal Abschreiben plus Abschreiben mal Ableiten“

$\cancel{x' \cdot (\ln x)'}$

$$\begin{aligned}
(x \cdot \ln x)' &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\
&= 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \\
&= \ln x + 1,
\end{aligned}$$

14.2 Ableitungsregeln
Quotientenregel

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1 + \underbrace{x^2 - 2x^2}_{-x^2}}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Speziell: $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1' \cdot g - 1 \cdot g'}{g^2} = \frac{-g'}{g^2}$

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

14.2 Ableitungsregeln
Ableitungsregeln für Potenzfunktionen

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

$$f(x) = x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot x^0$$
$$f(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot x^1$$
$$f(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^2$$
$$f(x) = x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot x^3$$

... ...

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Bemerkung: Die Formel gilt auch für **beliebige (negative und Brüche) Exponenten!**

Mit dieser Regel können wir nun Potenzfunktionen und Wurzeln ableiten:

$$(x^3 + 2x^2 - x + 1)' = 3x^2 + 4x - 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}^3}$$

14.2 Ableitungsregeln
Kettenregel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Das Einsetzen einer Funktion f in eine Funktion g heißt Verkettung:

$$g \circ f(x) \;=\; g(f(x)).$$

Beispiel

Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$. Dann ist:

$$g \circ f(x) \;=\; g(f(x)) \;=\; \sin\left(x^2\right)$$

und

$$f \circ g(x) \;=\; f(g(x)) \;=\; f(\sin x) \;=\; (\sin x)^2 \;=\; \sin^2 x.$$

Bemerkung:

Im Allgemeinen ist $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

14.2 Ableitungsregeln
Kettenregel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}.$$

1. Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$. Damit ist:

$$\begin{aligned}(\sin(x^2))' &= (g \circ f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x.\end{aligned}$$

1. Sortiere die Funktion von innen nach außen!
2. Leite von außen nach innen ab!

14.2 Ableitungsregeln
Kettenregel

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x).}_{\text{innere Ableitung}}$$

2. Sei $f(x) = c \cdot x$ und $g(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = c$, $g'(x) = e^x$ und daher

$$(e^{cx})' = (g \circ f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot c = c \cdot e^{cx}.$$

$$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$$

$$(e^{4x})' = e^{4x} \cdot 4$$

$$(e^{-4x})' = e^{-4x} \cdot (-4)$$

$$(e^{-x}) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

$$(\ln(\sin x))' = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\text{äußere Abl'g.}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{innere Abl'g}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

14.2 Ableitungsregeln
Kombinationen der Ableitungsregeln

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Bei der Ableitung werden alle Ableitungsregeln kombiniert.

Beispiele:

1) $f(x) = 4 \cdot x^3 - 10 \cdot x$

$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 10 = 12x^2 - 10$

2) $f(x) = (-1) \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$

$f'(x) = (-1) \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x^1 = -3x^2 + 6x$

14.2 Ableitungsregeln
Kombinationen der Ableitungsregeln

Bei der Ableitung werden alle Ableitungsregeln kombiniert.

Bemerkung: Manchmal gibt es mehrere Möglichkeiten die Ableitung zu berechnen.

Betrachte $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$:

1 Mit der Kettenregel ergibt sich: $f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x.$ $= \sin \frac{x}{2}$

2 Mit der Produktregel ist

$$\begin{aligned} (f(x))' &= (\sin x \cdot \sin x)' \\ &= \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x. = \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

14.2 Ableitungsregeln
Wichtige Ableitungen noch mal für Übung

$f(x)$	$f'(x)$	Beschreibung
c	0	Ableitung von Konstanten ist 0
x^n	nx^{n-1}	z.B. $(x^5)' = 5x^4$
e^x	e^x	die einzige Funktion, für die das gilt
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	sin(x) und cos(x) "drehen sich im Kreis"
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.2 Ableitungsregeln

Ableitungsregeln - Aufgaben

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

$$(\underbrace{\sin(x)}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g})' = (\sin x)' e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x = e^x(\cos x + \sin x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Von innen nach außen zuordnen, von außen nach innen ableiten!

14.2 Ableitungsregeln
Ableitungsregeln - Aufgaben

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

$$(\sin(x)e^x)' = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x$$

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{1 + \tan^2 x}$$

Von innen nach außen zuordnen, von außen nach innen ableiten!

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

14.2 Ableitungsregeln
Ableitungsregeln - Aufgaben

$\sin^5 x = (\sin x)^5$

$$(\sin(x)e^x)' = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x$$

$$(tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

$$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

3) $$(e^{sin^5(x)})' = e^{\sin^5 x} \cdot 5(\sin x)^4 \cdot \cos(x)$$

Von innen nach außen zuordnen, von außen nach innen ableiten!

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

14.2 Ableitungsregeln
Ableitungsregeln - Aufgaben

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

$$(\sin(x)e^x)' = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x$$

$$(tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

$$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$(e^{sin^5(x)})' = \quad e^{sin^5(x)} 5 sin^4(x) \cos(x)$$

Von innen nach außen zuordnen, von außen nach innen ableiten!

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

14.2 Ableitungsregeln
Mehrfache Ableitungen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Man kann Funktionen auch mehrmals ableiten.

$$f'' = (f')' \quad \text{und} \quad f''' = (f'')'.$$

Zu $f(x) = x^4$ ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3, \\ f''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2 \quad \text{und} \\ f'''(x) &= 12 \cdot 2x = 24x. \end{aligned}$$

Andere Schreibweisen für die zweite Ableitung f'':

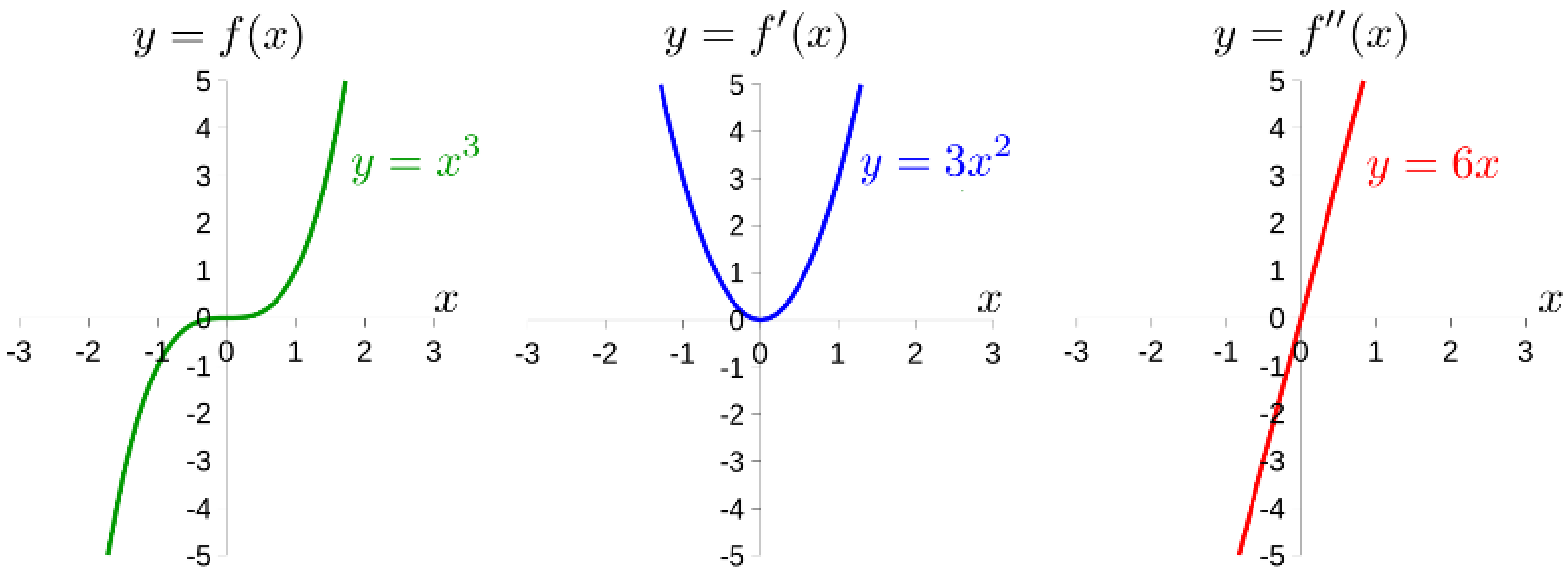
$$\frac{d^2}{dx^2} f, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \ddot{f}$$

14.2 Ableitungsregeln
Mehrfache Ableitungen

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als: Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Beispiel: $f(x) = x^3$



14.3 Anwendungen
Bewegung bei konstanter Beschleunigung

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences
ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

Weg als Funktion der Zeit $\quad s(t)$

Weg wächst mit zweiter Potenz der Zeit $\quad s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad [\mathrm{m}]$

Geschwindigkeit ist Ableitung des Wegs nach der Zeit $\quad v(t) = \dot{s}(t)$

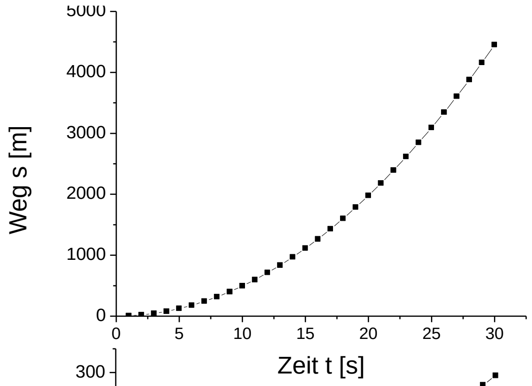
Geschwindigkeit wächst proportional zur Zeit $\quad v(t) = a \cdot t \quad [\mathrm{m/s}]$

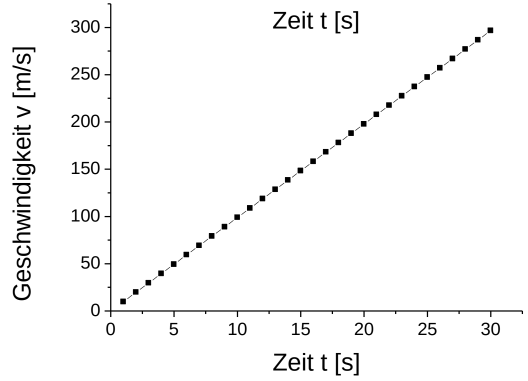
Beschleunigung ist Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit $\quad a(t) = \dot{v}(t)$

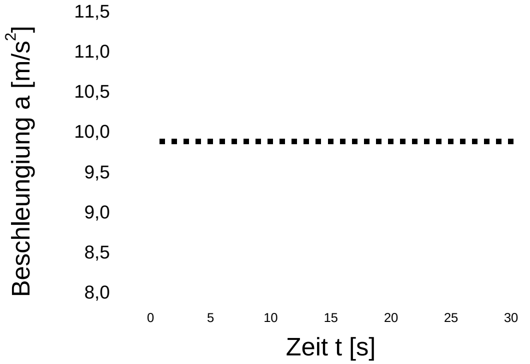
Im Intervall t **konstante Beschleunigung** $\quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Die Beschleunigung ist ein Quotient. Zähler: Änderung der Geschwindigkeit, Nenner: Zeit während der Änderung

Die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit $\quad a \quad [\mathrm{m/s^2}]$





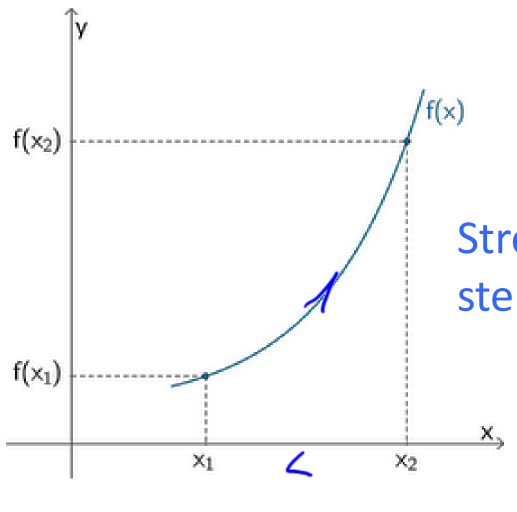


14.3 Anwendungen
Steigen und Fallen von Funktion

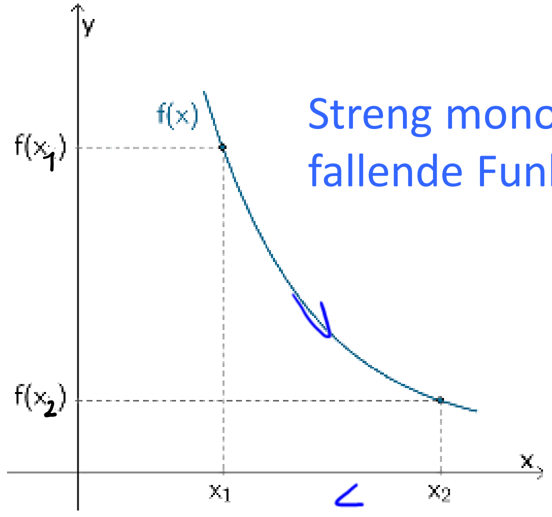
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Seien $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

monoton steigend	wenn	$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	wenn	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend	wenn	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	wenn	$f(x_1) > f(x_2)$



Streng monoton steigende Funktion



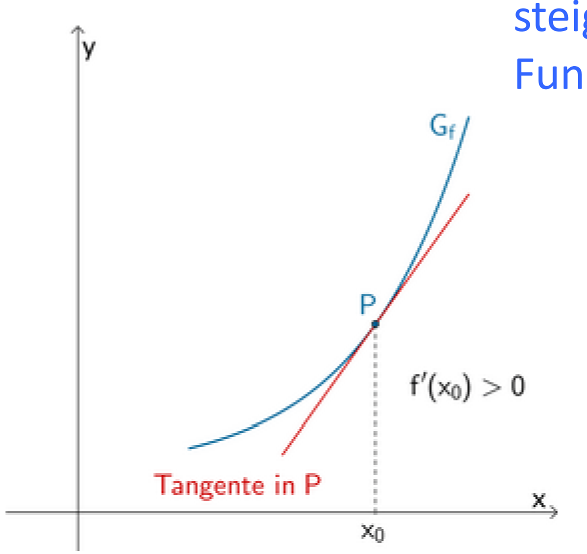
Streng monoton fallende Funktion

14.3 Anwendungen
Steigen und Fallen von Funktion

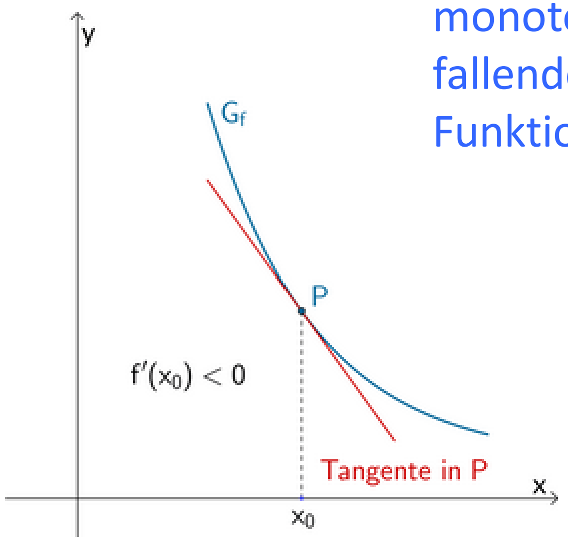
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

- Mittels der **Ableitung** bestimmen wir die **Steigung einer Tangente** an eine Funktion.
- Das **Vorzeichen** der **Tangentensteigung** zeigt, ob die Funktion **fällt**, **steigt** oder auf gleichem Niveau bleibt.

Streng monoton steigende Funktion



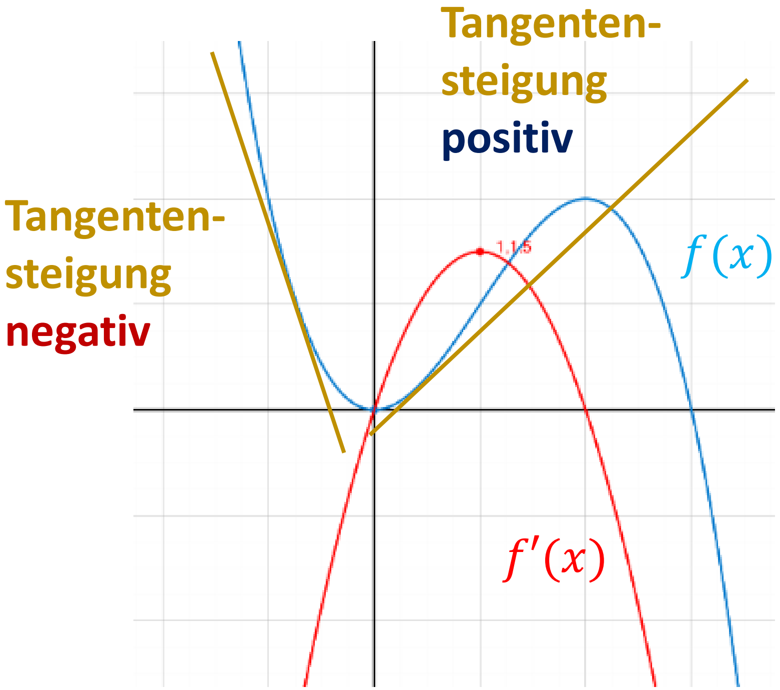
Streng monoton fallende Funktion



14.3 Anwendungen
Steigen und Fallen von Funktion

Tangentensteigung negativ
→ Ableitungsfunktion **negativ**

Tangentensteigung positiv
→ Ableitungsfunktion **positiv**

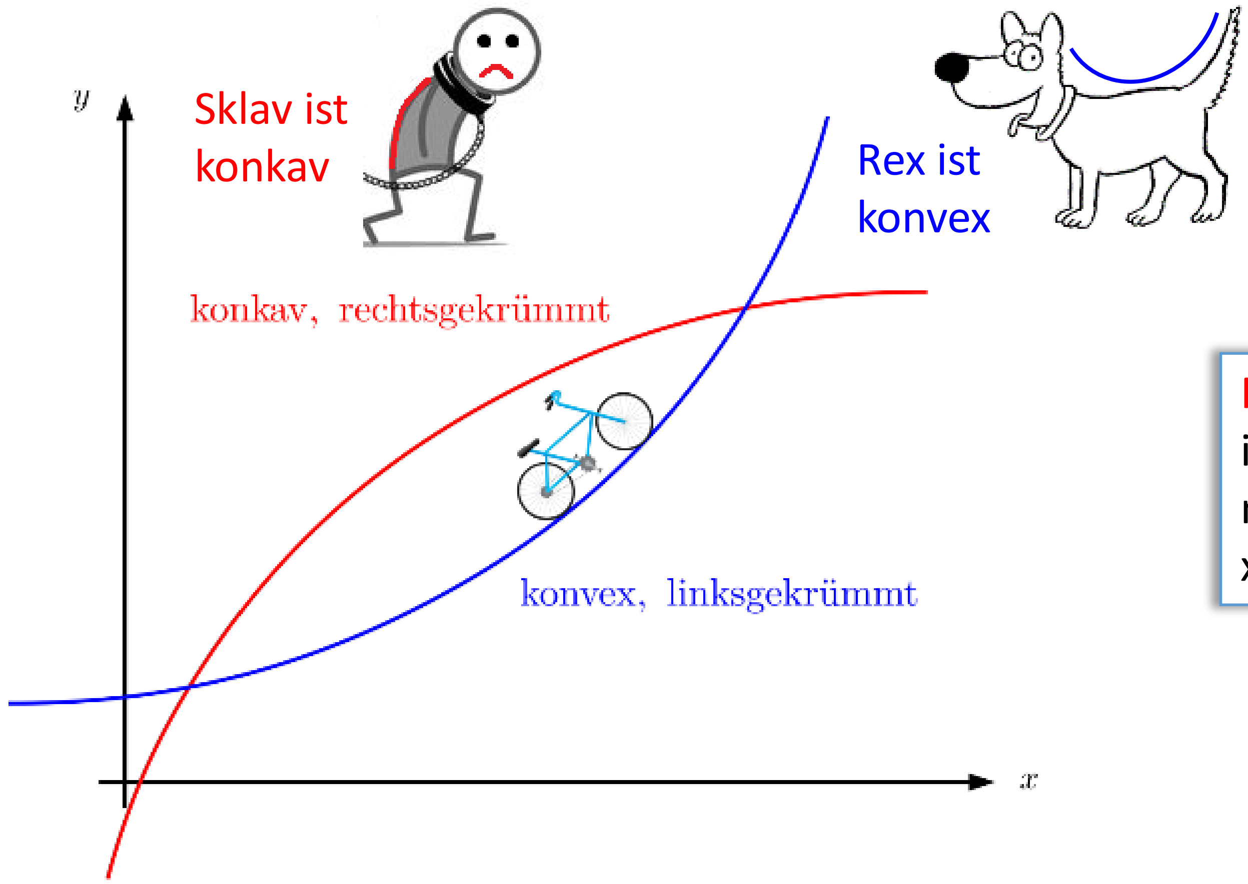


Für die Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}
f'(a) > 0 \quad &\Rightarrow \quad f \text{ streng monoton wachsend in einer Umgebung von } a \\
f'(a) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f \text{ weder steigend noch fallend in } a \\
f'(a) < 0 \quad &\Rightarrow \quad f \text{ streng monoton fallend in einer Umgebung von } a
\end{aligned}$$

14.3 Anwendungen

Konkav und Konvex

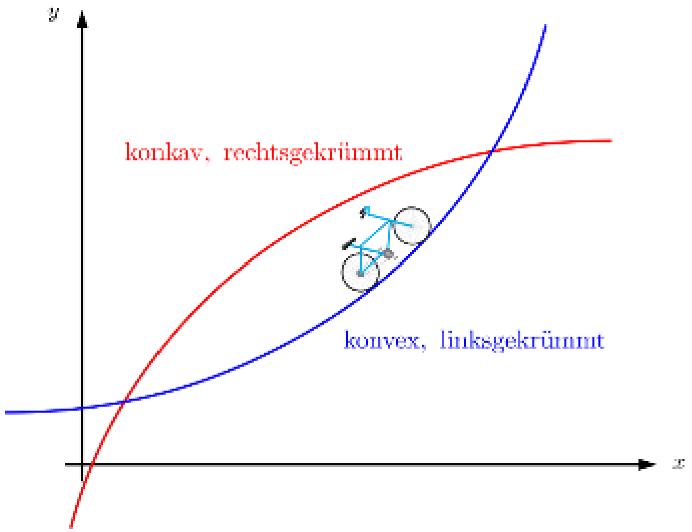


Rechts bzw. links bezieht sich darauf, in welche **Richtung** man **lenken** müsste, wenn man in Richtung der x-Achse auf der Kurve entlangführe.

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

14.3 Anwendungen
Konkav und Konvex

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences



Definition: Konkav und Konvex

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- f heißt **konkav (rechtsgekrümmt)** auf (a, b) genau dann, wenn f' auf (a, b) monoton fallend ist.
- f heißt **konvex (linksgekrümmt)** auf (a, b) genau dann, wenn f' auf (a, b) monoton steigend ist.

→ Zweite Ableitung ist negativ

→ Zweite Ableitung ist positiv

14.3 Anwendungen
Konkav und Konvex

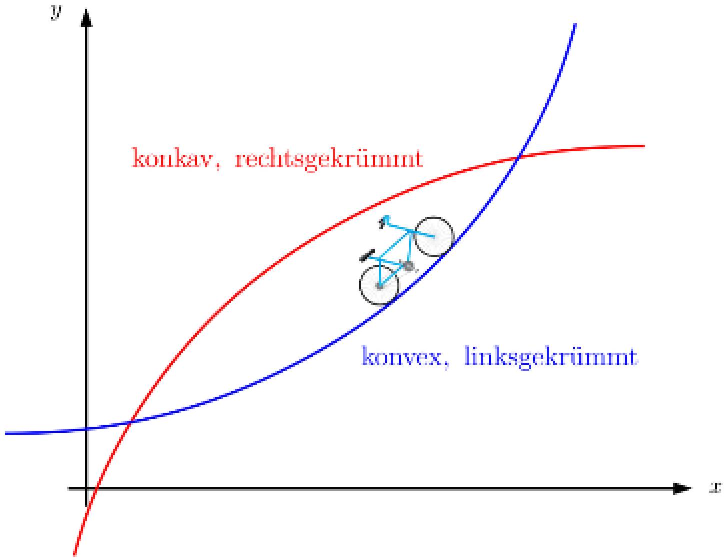
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Krümmung und zweite Ableitung

Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann gilt für alle $x \in (a,b)$:

(i) f ist konkav auf (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ ☹

(ii) f ist konvex auf (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ ☺



Beispiele

1. Die Funktion f mit $f(x) = -x^2$ ist konkav.
2. Die Funktion g mit $g(x) = x^2$ ist konvex.

14.3 Anwendungen
Extremwerte einer Funktion

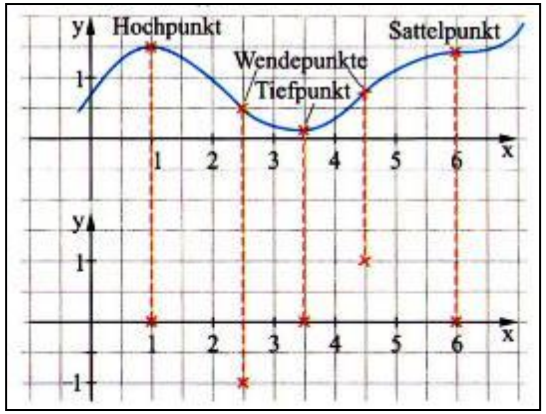
Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Definition (Minimum und Maximum einer Funktion) *Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich D. Dann heißt x_{max} Maximum von f, wenn*

$$\boxed{\underset{x \in D}{\forall}} f(x) \leq f(x_{max})$$

Enstprechend definiert man das Minimum x_{min} durch

$$\boxed{\underset{x \in D}{\forall}} f(x) \geq f(x_{min})$$



Globale Extremstellen

Lokale Extremstellen

→ In einem Streifen

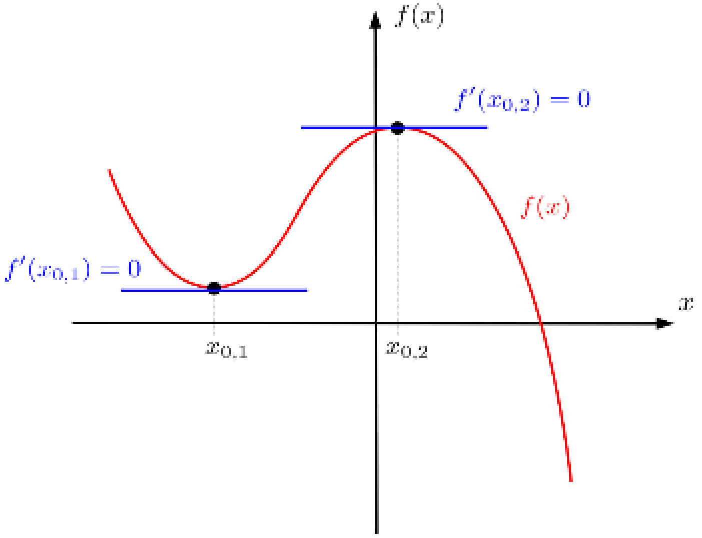
Extremstellen → waagerechte Tangente!

14.3 Anwendungen

Lokales oder Relatives Extremum

Hat eine Funktion an einer Stelle x_0 ein **lokales Maximum** oder ein **lokales Minimum**, so ist an dieser Stelle die Steigung der Funktion und die erste Ableitung gleich Null

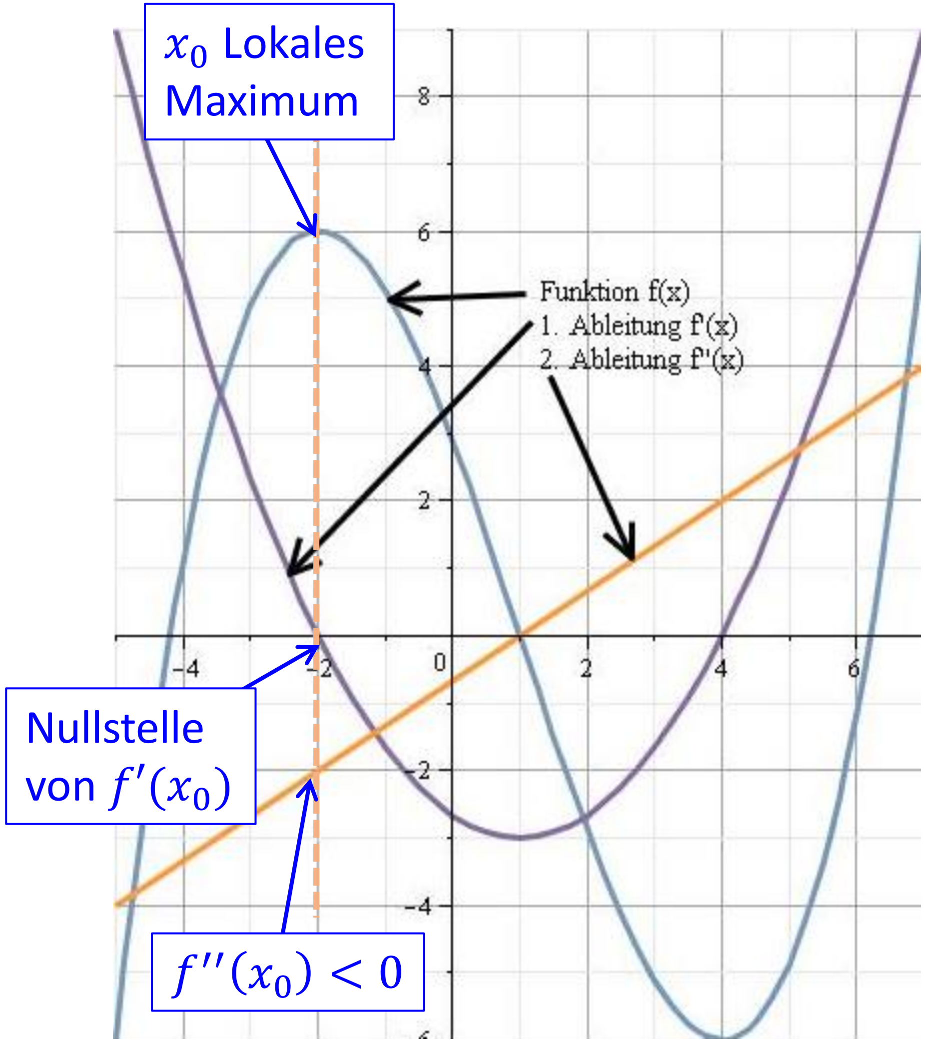
$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$



Achtung! Die Umkehrung gilt nicht:
Wenn $f(x_0) = 0$ ist, muss die Funktion an der Stelle $_0$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzen.

14.3 Anwendungen

Erste hinreichende Bedingung für Extremwerte



Ist eine Funktion f in x_0 zweimal differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$, ist weiter:

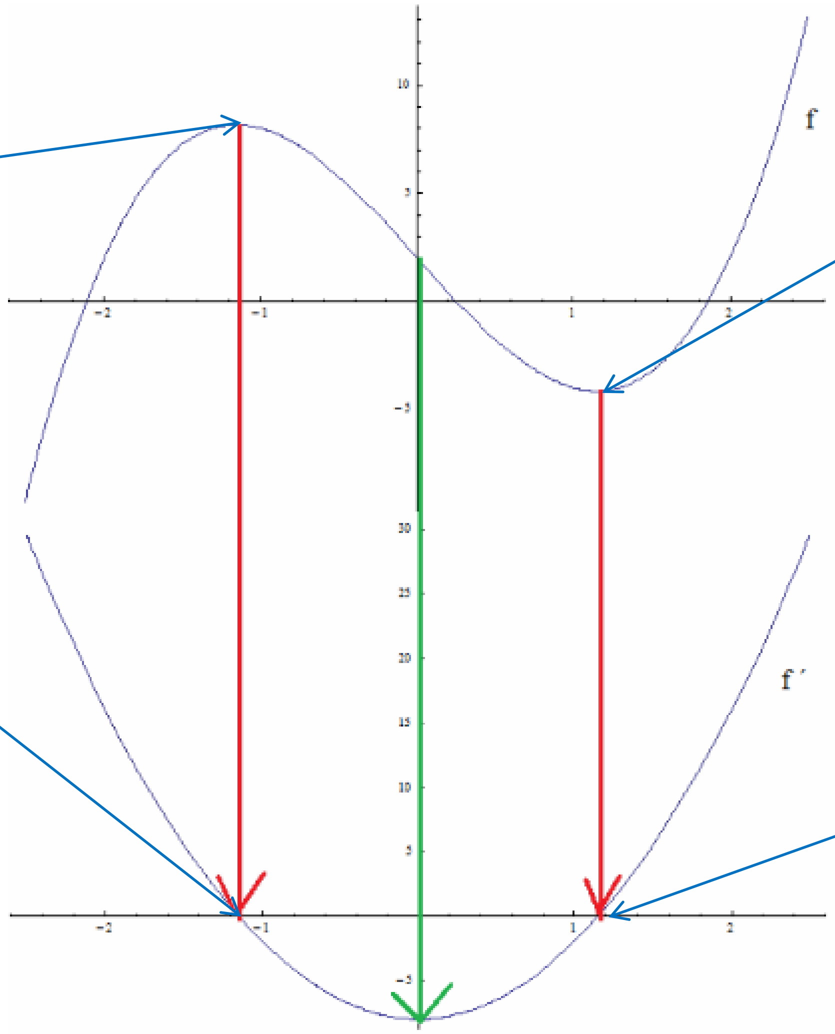
- $f''(x_0) < 0$, dann liegt in x_0 ein lokales Maximum vor.
- $f''(x_0) > 0$, dann liegt in x_0 ein lokales Minimum vor.

14.3 Anwendungen

2 Zweite Hinreichende Bedingung für Extremwerte

Lokales Maximum → Tangente parallel zu x-Achse, d.h. Steigung gleich Null

Lokales Minimum→ Tangente parallel zu x-Achse, d.h. Steigung gleich Null



Ableitung gleich Null und Steigung wechselt das Vorzeichen von + zu -

Ableitung gleich Null und Steigung wechselt das Vorzeichen von - zu +

14.3 Anwendungen

Zweite Hinreichende Bedingung für Extremwerte

Sei f an der Stelle x_0 und in einer Umgebung von x_0 differenzierbar.

- Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel** von „+“ nach „–“ hat, dann ist x_0 lokales Maximum.
- Wenn $f\,'\,(x_0) = 0$ ist und f' an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel** von „–“ nach „+“ hat, dann ist x_0 lokales Minimum.

14.3 Anwendungen

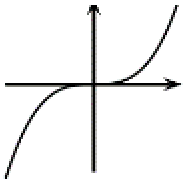
Lokales oder Relatives Extremum

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:
Innovative Hochschule
Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

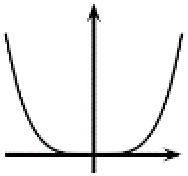
Beispiele

1. Die Funktion $f = x^3$ hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2$, also insbesondere $f'(0) = 0$, 0 ist aber keine Extremstelle von f.



2. $f(x) = x^4$ hat in $x_0 = 0$ eine Minimalstelle, es ist $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, also $f''(0) = 0$.

   $f'(x) = 4x^3$ hat in 0 einen Vorzeichenwechsel von „$-$“ zu „$+$“;



14.3 Anwendungen

Extremwertaufgaben

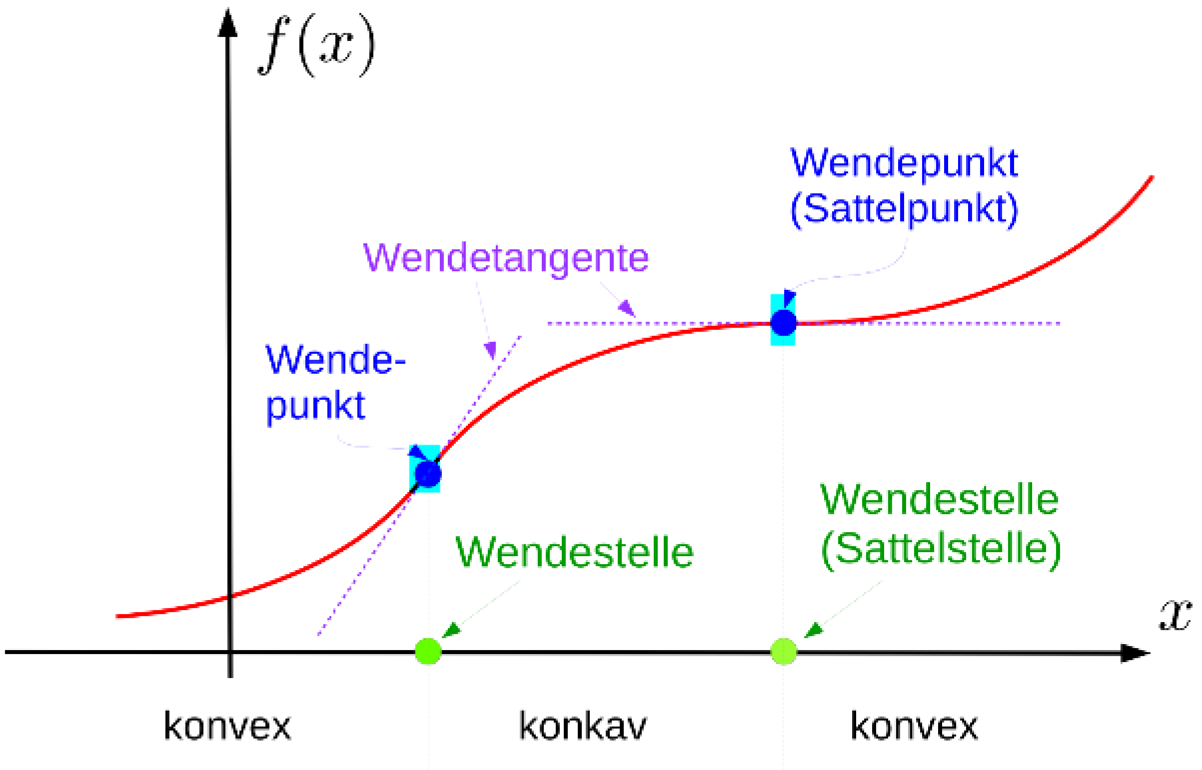
Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben

Von einer zweimal differenzierbaren Funktion $f(x)$ läßt sich der größte (bzw. der kleinste) Wert in einem vorgegebenen Intervall (a, b) wie folgt bestimmen:

1. Berechnung der im Innern des Intervalls (a, b) liegenden relativen Maxima (oder Minima)
2. Der Vergleich dieser Werte mit den Funktionswerten in den Randpunkten des Intervalls ergibt den gesuchten größten (oder kleinsten) Wert der Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b).

14.3 Anwendungen

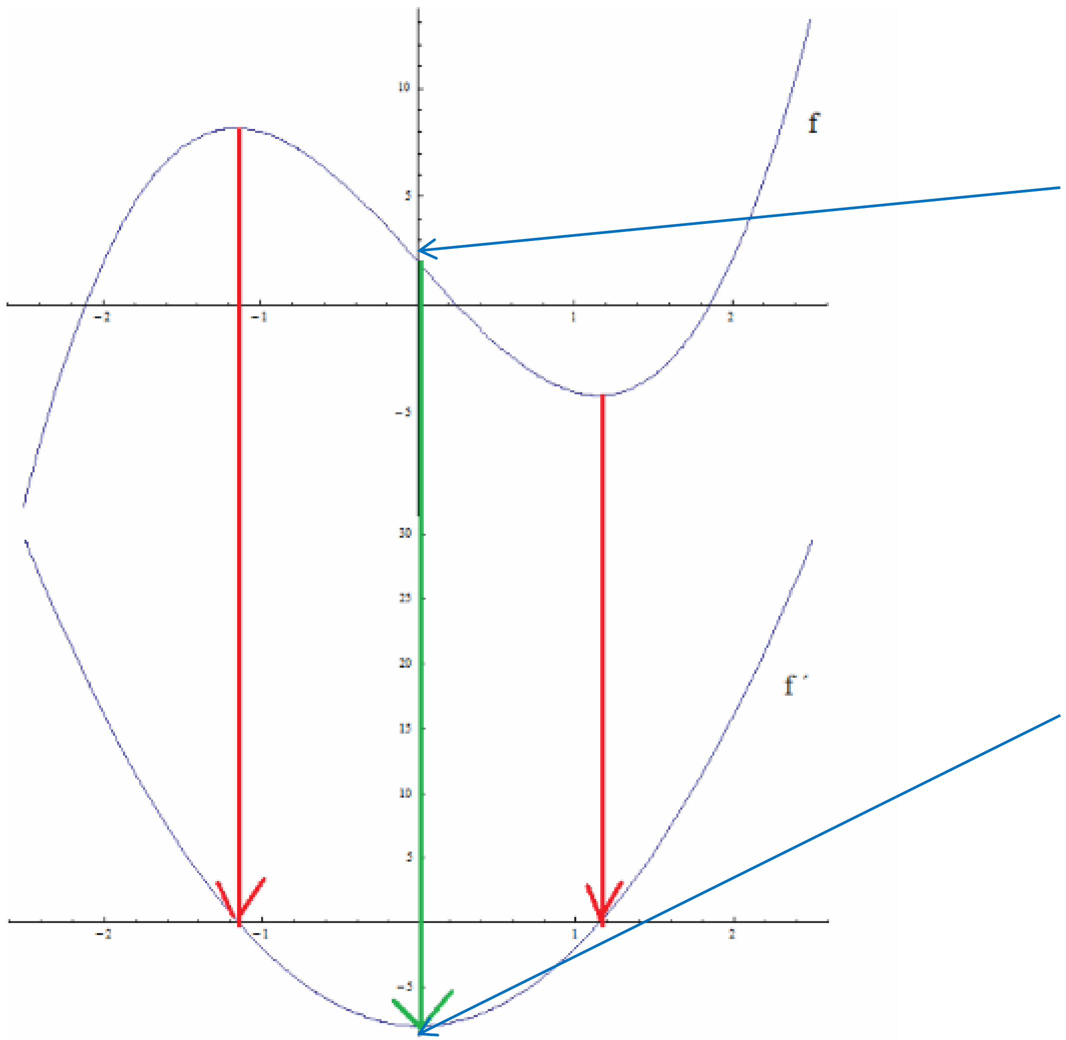
Wendepunkt / Sattelpunkt



14.3 Anwendungen

Wendepunkt / Sattelpunkt

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences



Steigung der Tangente wird vorher immer **kleiner**
→ **Wendepunkt**, d.h. die Steigung der Tangente **minimal**

Die **1. Ableitungsfunktion** hat **Minimum**,
→ die **2. Ableitung** ist an der Stelle gleich **Null**

14.3 Anwendungen

Wendepunkt / Sattelpunkt

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

- Hinreichende Bedingungen für einen Wendepunkt:

  Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar (mindestens dreimal), $x_W \in (a, b)$, so hat f in x_W einen Wendepunkt wenn

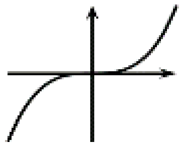
$$f''(x_W) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_W) \neq 0$$

- Wendepunkte mit waagerechter Wendetangente, d.h.

$$f'(x_W) = 0$$

  heißen **Sattelpunkte**.

z. B. $x_0 = 0$ bei $f(x) = x^3$



14.3 Anwendungen

Kurvendiskussion - Eigenschaften

1. Den maximal möglichen Definitionsbereich bestimmen;
2. Die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse angeben;
3. Symmetrieverhalten
   - Achsensymmetrisch $f(-x) = f(x)$
   - Punktsymmetrisch $f(-x) = -f(x)$
4. Extremstellen
5. Wendestellen
6. Krümmungsverhalten
7. Grenzwerte der Funktion um die Definitionslücken und für plus/minus Unendlichkeit oder an den Definitionsbereich-Grenzen ausrechnen
8. Wertebereich von $f(x)$.
9. Skizze des Funktionsgraphen

14.3 Anwendungen

Kurvendiskussion - Beispiel

Wir diskutieren die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. **Untersuchung auf Symmetrien**
   Die Funktion enthält nur gerade Potenzen von x, ist daher gerade.

2. **Bestimmung des Definitions- und Wertebereichs**
   Die Funktionen x^2 und e^x sind für alle reellen Zahlen definiert. Daraus folgt für den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Die Bestimmung des Wertebereiches stellen wir zunächst zurück.

3. **Bestimmung Nullstellen und y-Achsenabschnitt**
   Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen, somit hat auch $f(x)$ keine. $f(0) = e^0 = 1.$

4. **Auffinden von Unstetigkeiten**
   Beide Funktionen sind im Definitionsbereich stetig. Also ist auch $f(x)$ stetig.

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

ausgezeichnet als:

Innovative Hochschule

Eine gemeinsame Initiative von Bund und Ländern

14.3 Anwendungen

Kurvendiskussion - Beispiel

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

Wir diskutieren die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

5. **Asymptoten**
   Es gilt
   $$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$
   Daher ist die x-Achse sowohl für $x \to -\infty$ als auch für $x \to \infty$ die Asymptote.
6. **Auffinden der Extremwerte, Steigen bzw. Fallen** *Wir berechnen die ersten drei Ableitungen.*
   $$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f'(x) &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ f''(x) &= (-1+x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f'''(x) &= (3x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

14.3 Anwendungen

Kurvendiskussion - Beispiel

Wir diskutieren die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Wir suchen die Nullstelle(n) der ersten Ableitung. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, gilt

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Einsetzen in die zweite Ableitung liefert

$$f''(x_0) = -e^0 < 0$$

Also liegt dort ein Maximum vor. Der Funktionswert dort beträgt 1. Damit steht auch der Wertebereich $W =]0, 1]$ *fest.*

Weiter gilt

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \quad &\text{für} \quad x \in]0, \infty[\\ f'(x) > 0 \quad &\text{für} \quad x \in]-\infty, 0[\end{aligned}$$

Hochschule Flensburg
University of Applied Sciences

14.3 Anwendungen

Kurvendiskussion - Beispiel

Hochschule Flensburg University of Applied Sciences

Wir diskutieren die Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Wir suchen die Nullstelle(n) der ersten Ableitung. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, gilt

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Einsetzen in die zweite Ableitung liefert

$$f''(x_0) = -e^0 < 0$$

Also liegt dort ein Maximum vor. Der Funktionswert dort beträgt 1. Damit steht auch der Wertebereich $W =]0,1]$ *fest.*

Weiter gilt

$$\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \text{für} & x \in]0, \infty[\\ f'(x) > 0 & \text{für} & x \in]-\infty, 0[\end{array}$$

7. **Untersuchung des Krümmungsverhaltens (konvex, konkav, Wendepunkte)**

   Für die Nullstellen der zweiten Ableitung gilt

$$f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_W = \pm 1$$

   Da $f'''(\pm 1) \neq 0$ *sind dieses Wendepunkte. Für die Vorzeichen der zweiten Ableitung gilt*

$$\begin{array}{lll} f''(x) > 0 & \text{für} & x \in]-\infty, -1[\\ f''(x) < 0 & \text{für} & x \in]-1, 1[\\ f''(x) > 0 & \text{für} & x \in]1, \infty[\end{array}$$

8. **Funktionsbild**